

Serie 4: Polinomios, Ecuaciones, Inecuaciones y Sistemas - Soluciones

1. Contesta a las siguientes preguntas explicando razonadamente las respuestas.

¿Puede $x = 17$ ser una de las raíces del polinomio $2013x^4 - 52x^3 - 93x^2 - 4$?	No. Porque 17 no es divisor de -4.
¿Puede $6x^3 + x^2 - 26x - 21$ tener 4 raíces reales?	No. Al tratarse de un polinomio de tercer grado, tendrá un máximo de tres raíces.
¿Es $x^7 + x^4 - 2$ divisible entre $x - 1$?	No. Porque $(-1)^7 + (-1)^4 - 2 = -1 + 1 - 2 = -2 \neq 0$ (también se puede probar con Ruffini)
¿Es $x + 2$ uno de los factores de la descomposición de $x^3 - 2x^2 - 1$?	No. Porque $(-2)^3 - 2(-2)^2 - 1 = -8 - 8 - 1 = -17 \neq 0$ (también se puede probar con Ruffini)

2. Halla el valor de k en los siguientes polinomios teniendo en cuenta los datos indicados.

Al dividir $x^3 - 6x + k$ entre $x - 3$ el resto es 2	$3^3 - 6 \cdot 3 + k = 2 \rightarrow k = 2 - 27 + 18 \rightarrow \boxed{k = -7}$ (también se puede hacer por Ruffini)
$x + 1$ es uno de los factores de la descomposición de $kx^2 - 2x - 1$	$k(-1)^2 - 2(-1) - 1 = 0 \rightarrow k + 2 - 1 = 0 \rightarrow \boxed{k = -1}$ (también se puede hacer por Ruffini)
$x^4 + kx^3 + x^2 + 4$ es divisible entre $x + 2$	$(-2)^4 + k(-2)^3 + (-2)^2 + 4 = 0 \rightarrow 16 - 8k + 4 + 4 = 0 \rightarrow$ $\rightarrow -8k = -24 \rightarrow \boxed{k = 6}$ (también se puede hacer por Ruffini)

3. Halla polinomios, escritos en la forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, que cumplan las siguientes condiciones:

$P(x)$ es un polinomio de tercer grado que tiene las raíces -1, 2 y -2	$P(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 2) = (x + 1)(x^2 - 4) =$ $= \boxed{x^3 + x^2 - 4x - 4}$
$P(x)$ es un polinomio de segundo grado que tiene -3 como raíz doble.	$P(x) = (x + 3)^2 = \boxed{x^2 + 6x + 9}$
x^3 es el monomio de mayor exponente de $P(x)$, que tiene las raíces 1 y 3 y su término independiente es 6.	Desconocemos la tercera raíz. Si la llamamos 'a', tendríamos: $P(x) = (x - 1)(x - 3)(x - a)$ Como el término independiente es 6, es que: $(-1) \cdot (-3) \cdot (-a) = 6 \Rightarrow a = -2$ $P(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 2) = (x - 1)(x^2 - x - 6) =$ $= \boxed{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

$\frac{x+1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{6} = 0 \rightarrow \frac{3x+3-2x-1}{6} = 0 \rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$	Solución: $\boxed{x = -2}$
--	-----------------------------------

$$\frac{x-3}{2} - \frac{x-8}{12} = \frac{5-x}{4} - \frac{x}{3} \rightarrow \frac{6x-18}{12} - \frac{x-8}{12} = \frac{15-3x}{12} - \frac{4x}{12} \rightarrow (6x-18) - (x-8) = (15-3x) - 4x \rightarrow$$

$$\rightarrow 6x-18-x+8=15-3x-4x \rightarrow 6x-x+3x+4x=15+18-8 \rightarrow 12x=25 \Rightarrow x = \frac{25}{12}$$

Solución: $x = \frac{25}{12}$

$$(x-2)^2 - (x-1) \cdot (x+1) - \frac{x-2}{3} = \frac{1}{2}(x+2) \rightarrow x^2 - 4x + 4 - x^2 + 1 - \frac{x-2}{3} = \frac{x+2}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow -4x+3 - \frac{x-2}{3} = \frac{x+2}{2} \rightarrow \frac{-24x+18}{6} - \frac{2x-4}{6} = \frac{3x+6}{6} \rightarrow$$

$$\rightarrow -24x+18-2x+4=3x+6 \rightarrow -29x = -28 \Rightarrow x = \frac{28}{29}$$

Solución: $x = \frac{28}{29}$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado y bicuadradas:

$x^2 + 3x = 0$ $x(x+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$ Soluciones: $x = \begin{cases} 0 \\ -3 \end{cases}$	$4x^2 - 16 = 0$ $4x^2 = 16 \rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ Soluciones: $x = \pm 2$
--	--

$x^2 = 4x + 5$ $x^2 - 4x - 5 = 0$ $x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$ Soluciones: $x = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$	$x^4 = 100 - 21x^2$ $x^4 + 21x^2 - 100 = 0$ $z = x^2 \rightarrow z^2 + 21z - 100 = 0 \rightarrow$ $\rightarrow z = \frac{-21 \pm \sqrt{441+400}}{2} = \frac{-21 \pm 29}{2} = \begin{cases} 4 \rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ -25 \end{cases}$ Soluciones: $x = \pm 2$
--	---

6. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:

$\frac{x^2-1}{x+3} = \frac{x+1}{5}$ $5(x^2-1) = (x+1)(x+3) \rightarrow$ $5x^2-5 = x^2+4x+3 \rightarrow 4x^2-4x-8=0 \rightarrow$ $x^2-x-2=0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$ Soluciones: $x = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$	$\frac{x^2-8}{4-x} - 1 = 0$ $\frac{x^2-8}{4-x} = 1 \rightarrow x^2-8 = 4-x \rightarrow x^2+x-12=0 \rightarrow$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$ Soluciones: $x = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$
---	--

4. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas:

$x^3 - x^2 - 25x + 25 = 0$ <table style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">1</td> <td style="padding: 0 5px;">1</td> <td style="padding: 0 5px;">-1</td> <td style="padding: 0 5px;">-25</td> <td style="padding: 0 5px;">25</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">1</td> <td style="padding: 0 5px;">1</td> <td style="padding: 0 5px;">0</td> <td style="padding: 0 5px;">-25</td> <td style="padding: 0 5px;">0</td> </tr> </table> $x^2 - 25 = 0 \rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$ Soluciones: $x = \begin{cases} 1 \\ 5 \\ -5 \end{cases}$	1	1	-1	-25	25	1	1	0	-25	0	$2x^3 - 14x - 12 = 0$ <table style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">-1</td> <td style="padding: 0 5px;">2</td> <td style="padding: 0 5px;">0</td> <td style="padding: 0 5px;">-14</td> <td style="padding: 0 5px;">-12</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">-1</td> <td style="padding: 0 5px;">2</td> <td style="padding: 0 5px;">-2</td> <td style="padding: 0 5px;">2</td> <td style="padding: 0 5px;">12</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">2</td> <td style="padding: 0 5px;">2</td> <td style="padding: 0 5px;">-2</td> <td style="padding: 0 5px;">-12</td> <td style="padding: 0 5px;">0</td> </tr> </table> $2x^2 - 2x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm 10}{4} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$ Soluciones: $x = \begin{cases} -1 \\ 3 \\ -2 \end{cases}$	-1	2	0	-14	-12	-1	2	-2	2	12	2	2	-2	-12	0
1	1	-1	-25	25																						
1	1	0	-25	0																						
-1	2	0	-14	-12																						
-1	2	-2	2	12																						
2	2	-2	-12	0																						

7. Resuelve las siguientes ecuaciones radicales:

$\sqrt{3x-2} - 4 = 0$ $\sqrt{3x-2} = 4 \rightarrow (\sqrt{3x-2})^2 = 4^2 \rightarrow 3x-2 = 16 \rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$ Comprobación: $\sqrt{3 \cdot 6 - 2} - 4 = \sqrt{18 - 2} - 4 = \sqrt{16} - 4 = 4 - 4 = 0$ Sí es solución Solución: $x = 6$	
$\sqrt{7-3x} - x = 7$ $\sqrt{7-3x} = x+7 \rightarrow (\sqrt{7-3x})^2 = (x+7)^2 \rightarrow 7-3x = x^2 + 14x + 49 \rightarrow x^2 + 17x + 42 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 168}}{2} = \frac{-17 \pm 11}{2} = \begin{cases} -14 \\ -3 \end{cases}$ Comprobaciones: $\sqrt{7-3 \cdot (-14)} - (-14) = \sqrt{7+42} + 14 = \sqrt{49} + 14 = 7 + 14 = 21 \neq 7$ No es solución $x = -14$ $\sqrt{7-3 \cdot (-3)} - (-3) = \sqrt{7+9} + 3 = \sqrt{16} + 3 = 4 + 3 = 7$ Sí es solución Solución: $x = -3$	

8. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

$\log_5 x = -1$ $x = 5^{-1} = \frac{1}{5} = 0,2$ Solución: $x = 0,2$	$2\log_9 x = 3$ $\log_9 x = \frac{3}{2} \rightarrow x = 9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3} = 3^3 = 27$ Solución: $x = 27$
$\log_5 x + 2 = 0$ $\log_5 x = -2 \rightarrow x = 5^{-2} = \frac{1}{25}$ Solución: $x = \frac{1}{25}$	$3\log_8 x = -5$ $\log_8 x = \frac{-5}{3} \rightarrow x = 8^{\frac{-5}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^5}} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$ Solución: $x = \frac{1}{32}$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

$2^x = \frac{1}{32}$ $2^x = 2^{-5} \Rightarrow x = -5$ <i>Otro método:</i> $x = \log_2 \frac{1}{32} = \frac{\log_{10} \frac{1}{32}}{\log_{10} 2} = -5$ Solución: $x = -5$	
$2^x = 25$ $x = \log_2 25 = \frac{\log_{10} 25}{\log_{10} 2} = 4,6439$ Solución: $x = 4,6439$	
$3^x - 3 = 5 \rightarrow 3^x = 8 \rightarrow x = \log_3 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 3} = 1,8928$ Solución: $x = 1,8928$	

$$\frac{1}{4^x} = 2 \rightarrow 4^{-x} = 2 \rightarrow 2^{-2x} = 2 \rightarrow -2x = 1 \Rightarrow x = -0,5$$

Otro método: $4^{-x} = 2 \rightarrow -x = \log_4 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 4} = 0,5 \Rightarrow x = -0,5$

Solución: $x = -0,5$

10. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y no lineales:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 3x - 5y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20x + 10y = 10 \\ 6x - 10y = 16 \end{cases} \rightarrow 26x = 26 \Rightarrow x = 1 \rightarrow 4 + 2y = 2 \rightarrow 2y = -2 \Rightarrow y = -1$$

Solución: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{3y}{4} = 5 \\ \frac{5x}{3} - \frac{y}{2} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{8x}{12} + \frac{9y}{12} = \frac{60}{12} \\ \frac{10x}{6} - \frac{3y}{6} = \frac{18}{6} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x + 9y = 60 \\ 10x - 3y = 18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x + 9y = 60 \\ 30x - 9y = 54 \end{cases} \rightarrow 38x = 114 \Rightarrow x = 3$$

Solución: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$

$$x = 3 \Rightarrow 24 + 9y = 60 \rightarrow 9y = 36 \Rightarrow y = 4$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ x \cdot y = 6 \end{cases} \rightarrow 3y = 15 - 2x \rightarrow y = \frac{15 - 2x}{3} \rightarrow x \cdot \frac{15 - 2x}{3} = 6 \rightarrow \frac{15x - 2x^2}{3} = 6 \rightarrow 15x - 2x^2 = 18 \rightarrow$$

$$-2x^2 + 15x - 18 = 0 \rightarrow x = \frac{-15 \pm \sqrt{225 - 144}}{-4} = \frac{-15 \pm 9}{-4} = \begin{cases} \frac{3}{2} \rightarrow \frac{3}{2}y = 6 \rightarrow \frac{3y}{2} = 6 \rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = 4 \\ 6 \rightarrow 6y = 6 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Soluciones: $\begin{cases} x = 3/2 \\ y = 4 \end{cases}$ y $\begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$

11. Resuelve las siguientes inecuaciones lineales con una incógnita representando el resultado sobre la recta real y en forma de intervalo.

$$1 + \frac{3-x}{2} - \frac{2x-4}{3} \geq x - \frac{x+1}{6}$$

$$6 + 9 - 3x - 4x + 8 \geq 6x - x - 1$$

$$-12x \geq -24$$

$$x \leq 2$$

Soluciones: $x \in (-\infty, 2]$



$$(x+3)^2 - (x-2) \cdot (x+2) - \frac{1}{2}(4-x) > \frac{3x-2}{4}$$

$$x^2 + 6x + 9 - x^2 + 4 - \frac{4-x}{2} > \frac{3x-2}{4}$$

$$24x + 36 + 16 - 8 + 2x > 3x - 2$$

$$23x > -46 \Rightarrow x > -2$$

Soluciones: $x \in (-2, +\infty)$



12. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita representando el resultado sobre la recta real y en forma de intervalo.

$$\begin{cases} 1-2x \leq 0 \\ x+3 > \frac{1}{2} \\ 2x-1 \geq 3x-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x \leq -1 \\ 2x+6 > 1 \\ -x \geq -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2x > -5 \\ x \leq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x > -\frac{5}{2} \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Soluciones: $x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} > 2x-3 \\ 2x - \frac{x-2}{2} \geq \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 4x-6 \\ 12x-3x+6 \geq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x > -6 \\ 9x \geq -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq -\frac{4}{9} \end{cases}$$

Soluciones: $x \in \left[-\frac{4}{9}, 2 \right)$