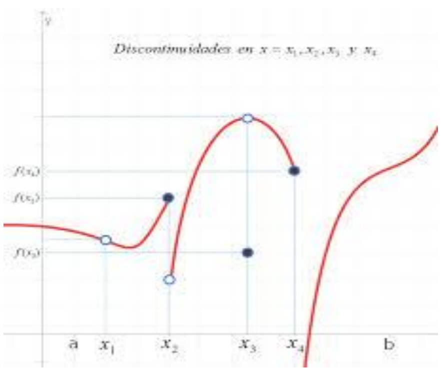
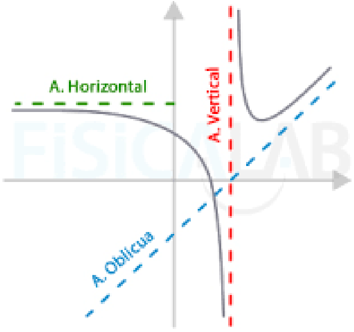
Unidad 11: Límites, continuidad y asíntotas

Qué vamos a aprender	
Concepto de límite *Límites laterales* *Límite en un punto* *Límite en el infinito*	$\lim_{x\to c^-} f(x)$ ***Límite cuando x tiende a "c" por la izquierda:*** valor al que se acerca la función según x avanza hacia c por su izquierda. $\lim_{x\to c^+} f(x)$ ***Límite cuando x tiende a "c" por la derecha:*** valor al que se acerca la función según x avanza hacia c por su derecha. $lim_{x\to c}\ f\ (x)$***Límite cuando x tiende a "c" :*** valor al que se acerca la función f según x avanza hacia c. Este límite existe cuando los dos laterales existen y toman el mismo valor. $lim_{x\to\infty}\ f\ (x)$***Límite cuando x tiende a infinito :*** a qué valor se acerca la función f según aumenta indefinidamente el valor de x. $lim_{x\to-\infty}\ f\ (x)$***Límite cuando x tiende a menos infinito :*** a qué valor se acerca la función f según disminuye indefinidamente el valor de x.
Continuidad de una función en un punto. Tipos de discontinuidades. 	Una función es ***continua en x=c*** si existen f(c) y $lim_{x\to c}\ f\ (x)$y toman el mismo valor. En otro caso, f es ***discontinua en x=c,*** y puede ser: A) **<u>EVITABLE:</u>** si existe $lim_{x\to c}\ f\ (x)$y es finito, pero no coincide con f(c) *(Como ocurre en los puntos x_1 y x_3)* B) **<u>DE SALTO FINITO</u>**: existen los dos límites laterales y ambos son finitos, pero distintos entre sí. *(Como ocurre en x_2)* C) **<u>DE SALTO INFINITO:</u>** alguno de los límites laterales es infinito *(Como ocurre en x_4)*

Asíntotas *Verticales* *Horizontales* *Oblicuas*  	Son rectas a las que la función se acerca indefinidamente, pero sin llegar a tocarla. Pueden ser de tres tipos: verticales, horizontales y oblicuas. Se calculan así: A) ***Asíntotas verticales***: de la forma x=a, siendo a un punto en el que se cumple: $lim_{x \to a} f\ (x) = \pm\infty$ B) ***Asíntotas horizontales:*** de la forma y = k, siendo k un punto en el que se cumple: $lim_{x \to \pm\infty} f\ (x) = k$ C) ***Asíntotas oblicuas:*** de la forma y=mx+n, siendo $m = lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = lim_{x \to \infty} f(x) - mx$ Si en una función f hay asíntotas horizontales, no habrá asíntotas oblicuas, por lo que ya no es necesario calcularlas.

Ejemplos resueltos:

Ejemplo 1: Vamos a estudiar la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x}$

Estudiar una función es analizar todas las características que podamos: dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes, continuidad, asíntotas, crecimiento, máximos y mínimos, concavidad, puntos de inflexión, … algunas cosas aún no sabremos calcularlas. El objetivo es poder, con esa información, representarla gráficamente. Por ahora sabremos hacer el siguiente estudio:

A) Dominio de f(x):

Debe ser $x \neq 0$ Por tanto: $Domf(x) = \Re \setminus \{0\}$.

B) Puntos de corte con los ejes:

Eje de las X: y = 0: $\frac{x^2-4}{x} = 0$; $x^2 - 4 = 0$; $x = \pm 2$; f(x) corta al eje X en dos puntos: (2,0) y (-2,0)

Eje de las Y: x=0: $y = \frac{0^2-4}{0}$No tiene sentido, pues x=0 no está en el dominio de f(x). Es decir, f(x) no corta al eje Y

C) Continuidad:

Dada su expresión analítica, una función podrá no ser continua en puntos donde veamos "problemas", "cosas raras", algo que no va bien…..

f(x) no puede ser continua en x=0 porque, tal y como ya hemos visto al estudiar su dominio, la función ni siquiera existe en ese punto. Vamos a estudiar qué tipo de discontinuidad presenta:

x=0: f(0) no existe

$lim_{x\to 0} f(x) = lim_{x\to 0} \frac{x^2-4}{x} = \left\{\frac{-4}{0}\right\}$ presenta una indeterminación. Este límite no existe, pues a la izquierda del cero toma valores positivos (tiende a infinito) y a la derecha toma valores negativos (tiende a menos infinito)

Por tanto, en x=0 la función presenta una discontinuidad de salto infinito.

Existen varios tipos de intetermінaciones, son expresiones de las que no sabemos su valor:
$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^\infty, 0^0, \infty^0$. *Existen técnicas para resolver cada una de ellas, lo aprenderéis.*

D) Simetrías:

$f(-x) = \frac{(-x)^2-4}{-x} = \frac{x^2-4}{-x} = -\frac{x^2-4}{x} = -f(x)$. Por tanto, la función es impar, es decir, simétrica respecto del origen.

E) Asíntotas:

- Asíntotas verticales: en x=0, las ramas laterales han sido estudiadas en el apartado anterior.
- Asíntotas horizontales: no tiene, pues $lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

Estos límites son infinito porque tenemos un cociente de polinomios en el que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador. Por tanto, el numerador crece más rápido, es " el que manda" y se dirige a infinito.

- Asíntotas Oblicuas:

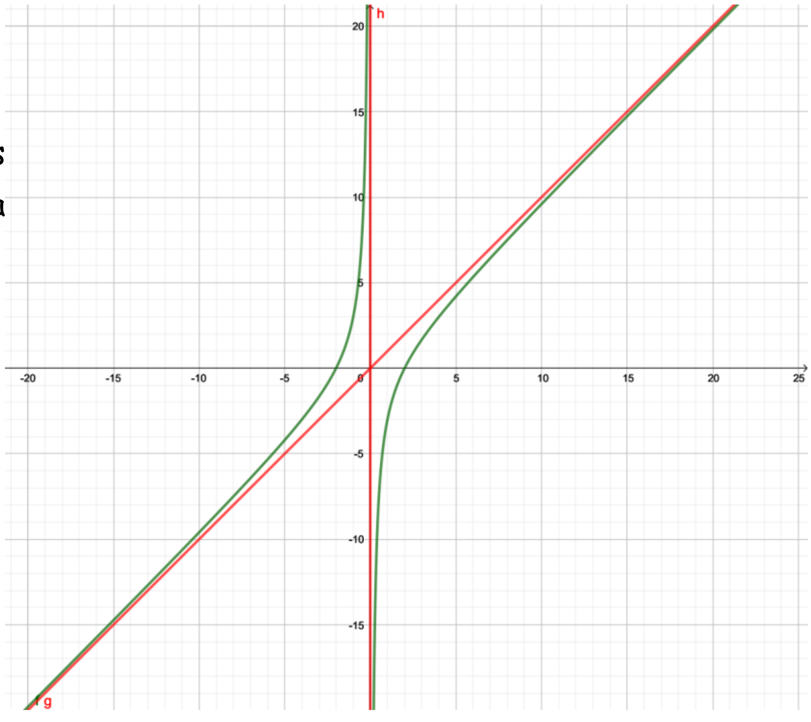
$m = lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x^2} = 1,$

$n = lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4}{x} - x\right) = lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4-x^2}{x} =$
$lim_{x\to\infty}\frac{-4}{x} = 0$

El valor de m es 1 porque los polinomios del cociente tienen el mismo grado (o sea, "mandan lo mismo"), y por tanto el resultado es el cociente de los coeficientes de los términos principales de cada uno de ellos.
El valor de n es 0 porque el denominador tiene mayor grado, es "el que manda". Se piensa diciendo que tengo 4 caramelos divididos entre infinitas personas, ¿a cuánto tocan cada una de ellas? Pues a nada….

Existe por tanto una asíntota oblícua de ecuación: y=x

Si en un eje de coordenadas representamos todo esto, vemos la forma que tiene la función:



Ejemplo 2: $f(x) = x^4 + 1$

A) Dominio de f(x): $Domf(x) = \Re$.

B) Puntos de corte con los ejes:

Eje de las X: y = 0: $x^4 + 1 = 0$, no tiene solución, por tanto la función no corta al eje X
Eje de las Y: x=0: $y = 0^4 + 1 = 1$, la función corta al eje Y en (0,1)

C) Continuidad: f(x) es continua en todo su dominio

D) Simetría:

$f(-x) = (-x)^4 + 1 = x^4 + 1 = f(x)$: La función es par, esto es, simétrica respecto del eje Y.

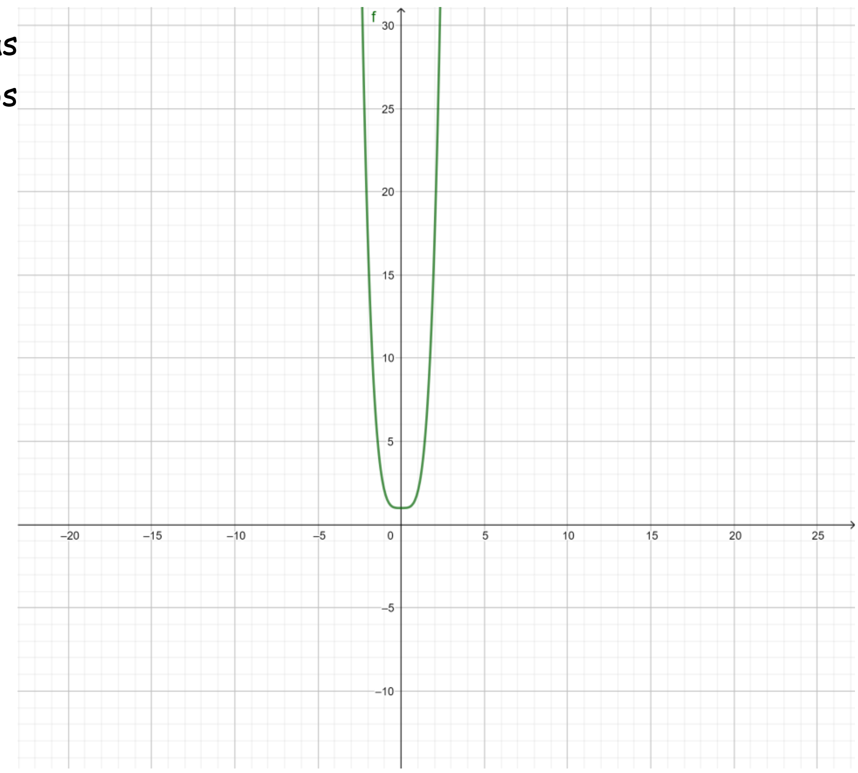
E) Asíntotas:

- Asíntotas verticales: no tiene

- Asíntotas horizontales: no tiene, pues $lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

- Asíntotas Oblicuas:
no tiene, pues $m = lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = lim_{x\to\infty} \frac{x^4+1}{x} = \infty$, no puede ser.

Si en un eje de coordenadas representamos todo esto, vemos la forma que tiene la función:



Ejemplo 3: $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-2x}$

A) Dominio de f(x): $x^2 - 2x = 0; x \cdot (x-2) = 0; x = 0{,}2 \quad Domf(x) = \mathfrak{R} \setminus \{0{,}2\}$.

B) Puntos de corte con los ejes:

Eje de las X: y = 0: $x^2 + 2 = 0$, no tiene solución, por tanto la función no corta al eje X
Eje de las Y: x=0: $y = \frac{0^2+2}{0^2-0}$, no tiene solución, puesto que la función no está definida en x=0
La función no corta a los ejes.

C) Continuidad: la función es continua en todos los puntos salvo en x=0 y en x=2, donde no está definida. Estudiemos qué tipo de discontinuidad presenta en cada caso:

X=0: si estudiamos los límites laterales:
Por la izquierda: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+2}{x^2-2x} = \left\{\frac{2}{0}\right\} = +\infty$
Por la derecha: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+2}{x^2-2x} = \left\{\frac{2}{0}\right\} = -\infty$
Por lo tanto, en x=0 presenta una discontinuidad de salto infinito.
X=2: si estudiamos los límites laterales:
Por la izquierda: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+2}{x^2-2x} = \left\{\frac{6}{0}\right\} = -\infty$
Por la derecha: $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+2}{x^2-2x} = \left\{\frac{6}{0}\right\} = +\infty$
Por lo tanto, en x=2 también presenta una discontinuidad de salto infinito.

D) Simetría:

$f(-x) = \frac{(-x)^2+2}{(-x)^2-2(-x)} = \frac{x^2+2}{x^2+2x}$, luego la función no es simétrica

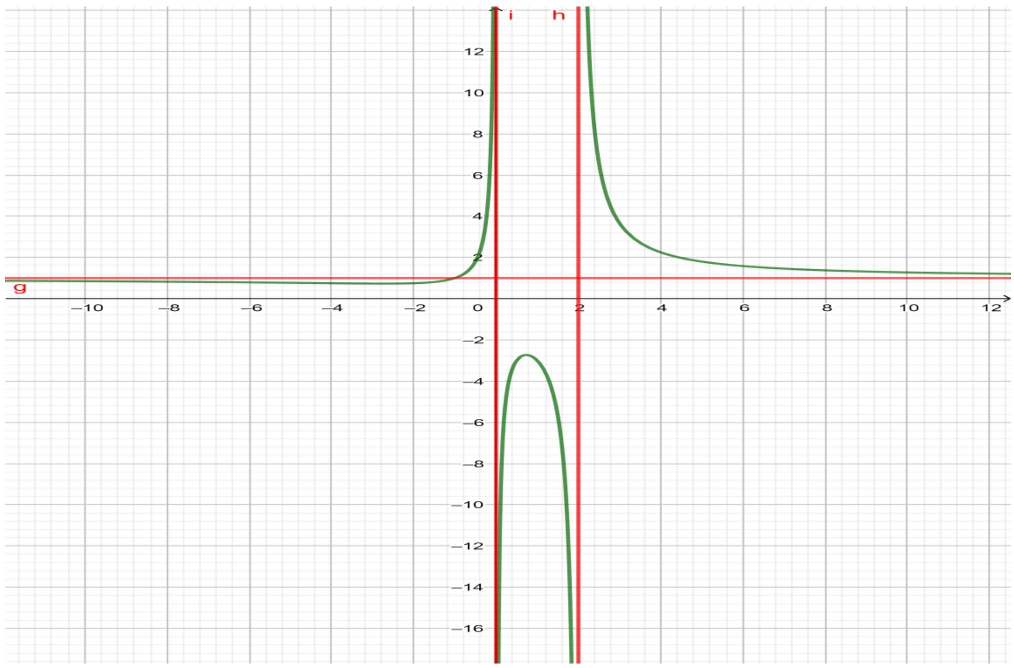
E) Asíntotas:

- Asíntotas verticales: en x=0 y en x=2, y las ramas ya se han estudiado en el apartado de continuidad.

- Asíntotas horizontales: $lim_{x\to\infty} f(x) = lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x^2-2x} = 1$Tiene una asíntota horizontal en y=1

- Asíntotas Oblicuas: No tiene, por tener horizontales.

Si en un eje de coordenadas representamos todo esto, vemos la forma que tiene la función:



Ejercicios y problemas:

1. Estudia todas las características y representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - x$ b) $f(x) = \sqrt{x-3}$ c) $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ e) $f(x) = \frac{4x}{x^2-2x}$ f) $f(x) = \frac{2x^2+3x}{x-2}$

(recuerda: puedes comprobar con Geogebra la representación gráfica)

2. Estudia la continuidad en los puntos de ruptura de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{Bmatrix} 2x-1, si\, x < 3 \\ 5-x, si\, x \geq 3 \end{Bmatrix}$ b) $f(x) = \begin{Bmatrix} 1, si\, x \leq 0 \\ x^2+1, si\, x > 0 \end{Bmatrix}$

c) $f(x) = \begin{Bmatrix} x^2-2, si\, x < 2 \\ x, si\, x \geq 2 \end{Bmatrix}$ d) $f(x) = \begin{Bmatrix} \frac{x^2-1}{x-1}, si\, x \neq 1 \\ 1, si\, x = 1 \end{Bmatrix}$