Sucesiones, Progresiones e Inducción en exámenes BI - NS

Mayo 00 P1 (#9)

The sum of the first n terms of an arithmetic sequence is $S_n = 3n^2 - 2n$. Find the nth term u_n

Nov 00 P1 (#7)

Find the sum of the positive terms of the arithmetic sequence 85 , 78 , 71 , ...

Nov 00 P1 (#15)

The sum of an infinite geometric sequence is $13\frac{1}{2}$, and the sum of the first three terms is 13. Find the first term.

Mayo 01 P1 (#7)

The nth term, u_n, of a geometric sequence is given by $u_n = 3(4)^{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

(a) Find the common ratio r.

(b) Hence, or otherwise, find S_n, the sum of the first n terms of this sequence.

Nov 01 P1 (#4)

Consider the infinite geometric series

$$1 + \left(\frac{2x}{3}\right) + \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \left(\frac{2x}{3}\right)^3 + \dots .$$

(a) For what values of x does the series converge?

(b) Find the sum of the series if $x = 1.2$.

Mayo 02 P1 (#1)

Tomemos la serie aritmética 2 + 5 + 8 + ...

(a) Halle una expresión de S_n, la suma de los primeros n términos.

(b) Halle el valor de n para el cual $S_n = 1365$.

Nov 02 P1 (#6)

Halle $\sum_{r=1}^{50} \ln(2^r)$, expresando la respuesta en la forma $a \ln 2$, donde $a \in \mathbb{Q}$.

Nov 02 P2 (#1)

Una sucesión $\{u_n\}$ está dada por $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$ donde $n \in \mathbb{Z}^+$

(a) Halle u_2, u_3, u_4.

(b) (i) Exprese u_n en función de n.

(ii) Verifique que su respuesta a la parte (b)(i) satisface la ecuación $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$.

Mayo 03 P1 (#1)

Una sucesión geométrica tiene todos sus términos positivos. La suma de los dos primeros términos es 15 y la suma de los infinitos términos de la sucesión es 27. Halle el valor de

(a) la razón común;

(b) el primer término.

Nov 03 P1 (#9)

Los cuatro primeros términos de una sucesión aritmética son $2, a-b, 2a+b+7$ y $a-3b$, donde a y b son constantes. Halle a y b.

Mayo 04 P1 (TZ2) (#4)

Los tres términos a, 1, b están en progresión aritmética. Los tres términos 1, a, b, están en progresión geométrica. Halle el valor de a y de b, sabiendo que $a \neq b$.

Mayo 04 P1 (TZ1) (#4)

A geometric series has a negative common ratio. The sum of the first two terms is 6. The sum to infinity is 8. Find the common ratio and the first term.

Mayo 04 P2 (TZ1) (#3)

Find an expression for the sum of the first 35 terms of the series

$$\ln x^2 + \ln\frac{x^2}{y} + \ln\frac{x^2}{y^2} + \ln\frac{x^2}{y^3} + \ldots$$

giving your answer in the form $\ln\frac{x^m}{y^n}$, where $m, n \in \mathbb{N}$.

Nov 04 P1 (#3)

La suma de los n primeros términos de una serie viene dada por

$$S_n = 2n^2 - n,\text{ donde } n \in \mathbb{Z}^+.$$

(a) Halle los tres primeros términos de la serie.

(b) Halle una expresión para el término n-ésimo de la serie, dando la respuesta en función de n.

Mayo 05 P1 (TZ2) (#18)

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética $\{u_n\}$ viene dada por la expresión $S_n = 4n^2 - 2n$. Tres términos de esta progresión, u_2, u_m y u_{32}, son términos consecutivos de una progresión geométrica. Halle m.

Mayo 05 P2 (TZ1) (#4i)
Nov 09 P1 (#11)

Using mathematical induction, prove that

$$\sum_{r=1}^{n}(r+1)\,2^{r-1} = n2^n,\ n \in \mathbb{Z}^+$$

Mayo 05 P2 (TZ1) (#4ii)

The first three terms of a geometric sequence are also the first, eleventh and sixteenth term of an arithmetic sequence.
The terms of the geometric sequence are all different.
The sum to infinity of the geometric sequence is 18.

(a) Find the common ratio of the geometric sequence, clearly showing all working.

(b) Find the common difference of the arithmetic sequence.

Nov 05 P1 (#8)

Halle $\sum_{n=1}^{15} a_n^2$ donde $a_n = \ln x^n$.

Nov 05 P2 (#3)

(a) Demuestre mediante inducción matemática que

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(2r-1)(2r+1)} = \frac{n}{2n+1},\ n \in \mathbb{Z}^+.$$

(b) A partir de lo anterior, compruebe que la suma de los primeros $(n+1)$ términos de la serie $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\ldots$ es $\frac{(n+1)}{(2n+3)}$.

Mayo 06 P1 (#1)

En una progresión aritmética, el segundo término es 7 y la suma de los primeros cinco términos es 50. Halle la diferencia común de esta progresión aritmética.

Nov 06 P1 (#5)

La suma infinita de una serie geométrica es 32. La suma de los cuatro primeros términos es 30 y todos los términos son positivos.

Halle la diferencia entre la suma infinita y la suma de los ocho primeros términos.

Nov 06 P2 (#1B) Mayo 09 P1 (TZ2) (#8b)

(a) Utilice inducción matemática para demostrar que

$$(1)(1!)+(2)(2!)+(3)(3!)+...+(n)(n!)=(n+1)!-1 \text{ donde } n\in\mathbb{Z}^{+}.$$

(b) Halle el número mínimo de términos de la serie para el cual la suma sobrepasa 10^9.

Mayo 07 P1 (TZ2) (#13)

Considere la serie aritmética $-6+1+8+15+...$.
Halle el menor número de términos necesarios para que la suma de la serie sea mayor que $10\,000$.

Mayo 07 P1 (TZ1) (#14)

An infinite geometric series is given by $\sum_{k=1}^{\infty} 2(4-3x)^k$.

(a) Find the values of x for which the series has a finite sum.

(b) When $x=1.2$, find the minimum number of terms needed to give a sum which is greater than 1.328.

Mayo 07 P2 (TZ1) (#4)

Prove **by induction** that $12^n+2(5^{n-1})$ is a multiple of 7 for $n\in\mathbb{Z}^{+}$

Nov 07 P1 (#4)

Los términos primero y cuarto de una serie geométrica son, respectivamente, 18 y $-\frac{2}{3}$.

Halle

(a) la suma de los n primeros términos de la serie;

(b) la suma de los infinitos términos de la serie.

Muestra 08 P1 (#43Bd)

An arithmetic sequence has p as its common difference. Also, a geometric sequence has p as its common ratio. Both sequences have 1 as their first term.

(i) Write down, in terms of p, the first four terms of each sequence.

(ii) If the sum of the third and fourth terms of the arithmetic sequence is equal to the sum of the third and fourth terms of the geometric sequence, find the three possible values of p.

(iii) For which value of p found in (d)(ii) does the sum to infinity of the terms of the geometric sequence exist?

(iv) For the same value p, find the sum of the first 20 terms of the arithmetic sequence writing your answer in the form $a+b\sqrt{c}$, where $a, b, c\in\mathbb{Z}$.

Muestra 08 P2 (#1)

A sum of $\$\,5000$ is invested at a compound interest rate of 6.3 % per annum.

(a) Write down an expression for the value of the investment after n full years.

(b) What will be the value of the investment at the end of five years?

(c) The value of the investment will exceed $\$\,10\,000$ after n full years.

(i) Write an inequality to represent this information.

(ii) Calculate the minimum value of n.

Muestra 08 P1 (#44)

Use mathematical induction to prove that $5^n + 9^n + 2$ is divisible by 4, for $n \in \mathbb{Z}^+$

Mayo 08 P1 (TZ1) (#7)

The common ratio of the terms in a geometric series is 2^x.

(a) State the set of values of x for which the sum to infinity of the series exists.

(b) If the first term of the series is 35, find the value of x for which the sum to infinity is 40.

Mayo 08 P1 (TZ2) (#12a)

Halle la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica $27; -9; 3; -1; \ldots$.

Mayo 08 P1 (TZ2) (#12b)

Utilice la inducción matemática para demostrar que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

Nov 08 P2 (#2)

Una progresión geométrica tiene como primer término 2 y la razón común es 1,05. Halle el valor del menor de los términos mayores de 500.

Nov 08 P1 (#4)

Una cuerda de 81 metros se corta en n trozos de longitud creciente, formando estas longitudes una progresión aritmética cuya diferencia común es igual a d metros. Sabiendo que las longitudes del trozo más corto y del más largo son 1,5 metros y 7,5 metros respectivamente, halle los valores de n y d.

Mayo 09 P1 (TZ1) (#12)

Consider the set of numbers $a, 2a, 3a, \ldots, na$, where a and n are positive integers.

(i) Show that the expression for the mean of this set is $\dfrac{a(n+1)}{2}$.

(ii) Let $a = 4$. Find the minimum value of n for which the sum of these numbers exceeds its mean by more than 100.

Nov 09 P1 (#11)

(a) La suma de los seis primeros términos de una serie aritmética es igual a 81. La suma de los once primeros términos es igual a 231. Halle el primer término y la diferencia común.

(b) La suma de los dos primeros términos de una serie geométrica es igual a 1, mientras que la suma de los cuatro primeros términos es igual a 5. Sabiendo que todos sus términos son positivos, halle el primer término y la razón común.

(c) El término *r-ésimo* de una nueva serie se define como el producto del término *r-ésimo* de la serie aritmética y el término *r-ésimo* de la serie geométrica anteriormente mencionadas. Compruebe que el término *r-ésimo* de esta nueva serie es $(r+1)2^{r-1}$.

Nov 09 P1 (#11d)

Utilizando la inducción matemática, demuestre que

$$\sum_{r=1}^{n}(r+1)\,2^{r-1}=n2^{n}\,,\ n\in\mathbb{Z}^{+}.$$

Mayo 10 P1 (TZ2) (#11a)

Considere la siguiente sucesión de ecuaciones:

$$1\times 2=\frac{1}{3}(1\times 2\times 3)\,,$$
$$1\times 2+2\times 3=\frac{1}{3}(2\times 3\times 4)\,,$$
$$1\times 2+2\times 3+3\times 4=\frac{1}{3}(3\times 4\times 5)\,,$$
$$\dots\,.$$

(i) Formule una conjetura para la n-ésima ecuación de la sucesión.

(ii) Verifique su conjetura para $n=4$.

Mayo 10 P1 (TZ2) (#11b)

El término n-ésimo de una sucesión de números viene dado por $u_n=2^n+3$, $n\in\mathbb{Z}^{+}$. Bill conjetura que todos los elementos de la sucesión son números primos. Compruebe que la conjetura de Bill es falsa.

Mayo 10 P1 (TZ2) (#11c)

Utilice la inducción matemática para demostrar que $5\times 7^n+1$ es divisible por 6 para todo $n\in\mathbb{Z}^{+}$.

Mayo 10 P2 (TZ1) (#6)

Find the sum of all three-digit natural numbers that are not exactly divisible by 3

Mayo 10 P2 (TZ2) (#1)

Considere la progresión aritmética $8,\ 26,\ 44,\ \dots$.

(a) Halle una expresión para el término n-ésimo.

(b) Escriba la suma de los n primeros términos, utilizando la notación sigma.

(c) Calcule la suma de los 15 primeros términos.

Nov 10 P1 (#6)

La suma, S_n, de los n primeros términos de una progresión geométrica, cuyo término n-ésimo es u_n, viene dada por

$$S_n=\frac{7^n-a^n}{7^n}\,,\ \text{donde } a>0\,.$$

(a) Halle una expresión para u_n.

(b) Halle el primer término y la razón común la progresión.

(c) Considere la suma de los infinitos términos de la progresión.

(i) Determine los valores de a para los cuales existe la suma de los infinitos términos de la progresión.

(ii) Halle la suma de los infinitos términos, cuando esta suma existe.

Nov 10 P1 (#5)

La media de los diez primeros términos de una progresión aritmética es igual a 6. La media de los veinte primeros términos de la progresión aritmética es igual a 16. Halle el valor del 15.º término de la progresión.

Mayo 11 P1 (TZ1) (#3)

A geometric sequence $u_1, u_2, u_3, \ldots$ has $u_1 = 27$ and a sum to infinity of $\frac{81}{2}$.

(a) Find the common ratio of the geometric sequence.

An arithmetic sequence $v_1, v_2, v_3, \ldots$ is such that $v_2 = u_2$ and $v_4 = u_4$.

(b) Find the greatest value of N such that $\sum_{n=1}^{N} v_n > 0$.

Mayo 11 P1 (TZ2) (#10)

An arithmetic sequence has first term a and common difference d, $d \neq 0$. The 3rd, 4th and 7th terms of the arithmetic sequence are the first three terms of a geometric sequence.

(a) Show that $a = -\frac{3}{2}d$.

(b) Show that the 4th term of the geometric sequence is the 16th term of the arithmetic sequence.

Mayo 11 P2 (TZ2) (#2)

En una serie aritmética cuyo enésimo término es u_n, se sabe que $u_4 = 7$ y $u_9 = 22$. Halle el valor mínimo de n para el cual $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n > 10\,000$.

Mayo 11 P2 (TZ2) (#13A)

Demuestre utilizando la inducción matemática que, para $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}.$$

Nov 11 P2 (#7)

(a) Halle el conjunto de valores de x para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2x}{x+1}\right)^n$ tiene una suma finita.

(b) A partir de lo anterior, halle dicha suma, en función de x.

Nov 11 P2 (#12a)

En una progresión aritmética el primer término es 8 y la diferencia común es $\frac{1}{4}$.

Sabiendo que la suma de los $2n$ primeros términos es igual a la suma de los siguientes n términos, halle n.

Nov 11 P2 (#12b)

Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ son términos de una progresión geométrica de razón común $r \neq 1$, compruebe que

$$(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_4)^2 + \ldots + (a_n - a_{n+1})^2 = \frac{a_1^{\,2}(1-r)(1-r^{2n})}{1+r}.$$

Mayo 12 P2 (TZ2) (#1)

La suma de los 16 primeros términos de una progresión aritmética es 212, y el quinto término es 8.

(a) Halle el primer término y la diferencia común.

(b) Halle el menor valor de n para el cual la suma de los n primeros términos es mayor que 600.

Mayo 12 P1 (TZ1) (#1)

Find the value of k if $\sum_{r=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^r = 7$

Mayo 12 P2 (TZ2) (#8)

Cada vez que una pelota bota, alcanza un 95 % de la altura lograda en el bote anterior. Inicialmente la pelota se deja caer desde una altura de 4 metros.

(a) ¿Qué altura alcanza la pelota después del cuarto bote?

(b) ¿Cuántas veces bota la pelota antes de que ya no alcance una altura de 1 metro?

(c) ¿Cuál es la distancia total que recorre la pelota?

Nov 12 P2 (#1)

Halle la suma de todos los múltiplos de 3 comprendidos entre 100 y 500.

Nov 12 P2 (#5)

Una barra de metal de 1 metro de longitud se corta en 10 piezas, cuyas longitudes forman una progresión geométrica. La pieza más larga tiene una longitud igual a 8 veces la longitud de la pieza más corta. Halle la longitud de la pieza más corta, redondeando al milímetro más cercano.

Mayo 13 P1 (TZ1) (#8)

The first terms of an arithmetic sequence are $\frac{1}{\log_2 x}, \frac{1}{\log_8 x}, \frac{1}{\log_{32} x}, \frac{1}{\log_{128} x}, \ldots$

Find x if the sum of the first 20 terms of the sequence is equal to 100.

Mayo 13 P1 (TZ2) (#6)

En una progresión geométrica, el primer término es a, la razón común es r y la suma de los infinitos términos es igual a 76. En una segunda progresión geométrica, el primer término es a, la razón común es r^3 y la suma de los infinitos términos es igual a 36.

Halle r.

Mayo 13 P2 (TZ2) (#5)

En la progresión aritmética $\{u_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$, el primer término es $u_1 = 1,6$ y la diferencia común es $d = 1,5$. En la progresión geométrica $\{v_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$, el primer término es $v_1 = 3$ y la razón común es $r = 1,2$.

(a) Halle una expresión para $u_n - v_n$ en función de n.

(b) Determine el conjunto de valores de n para los cuales $u_n > v_n$.

(c) Determine el mayor valor de $u_n - v_n$. Dé la respuesta con una aproximación de cuatro cifras significativas.

Mayo 13 P2 (TZ2) (#11a)

(i) Exprese la suma de los n primeros números enteros impares positivos utilizando la notación de sumatoria.

(ii) Compruebe que la suma del apartado anterior es igual a n^2.

(iii) Deduzca el valor de la diferencia entre la suma de los 47 primeros números impares positivos y la suma de los 14 primeros números impares positivos.

Mayo 13 P2 (TZ2) (#8)

Utilice el método de inducción matemática para demostrar que $5^{2n}-24n-1$ es divisible por 576 para $n \in \mathbb{Z}^+$.

Nov 13 P1 (#6)

Demuestre mediante inducción matemática que n^3+11n es divisible entre 3 para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

Nov 13 P1 (#7)

La suma de los dos primeros términos de una serie geométrica es igual a 10, mientras que la suma de los cuatro primeros términos es igual a 30.

(a) Compruebe que la razón común r satisface $r^2=2$.

(b) Sabiendo que $r=\sqrt{2}$,

(i) halle el primer término;

(ii) halle la suma de los diez primeros términos.

Nov 13 P2 (#2)

El cuarto término de una progresión aritmética es 34 y el décimo término es 76.

(a) Halle el primer término y la diferencia común.

(b) La suma de los n primeros términos es mayor que 5000. Halle el menor valor posible de n.

Muestra 14 P2 (#11)

A bank offers loans of $\$P$ at the beginning of a particular month at a monthly interest rate of I. The interest is calculated at the end of each month and added to the amount outstanding. A repayment of $\$R$ is required at the end of each month. Let $\$S_n$ denote the amount outstanding immediately after the n^{th} monthly repayment.

(a) (i) Find an expression for S_1 and show that

$$S_2 = P\left(1+\frac{I}{100}\right)^2 - R\left(1+\left(1+\frac{I}{100}\right)\right).$$

(ii) Determine a similar expression for S_n. Hence show that

$$S_n = P\left(1+\frac{I}{100}\right)^n - \frac{100R}{I}\left(\left(1+\frac{I}{100}\right)^n - 1\right).$$

(b) Sue borrows \$5000 at a monthly interest rate of 1 % and plans to repay the loan in 5 years (*i.e.* 60 months).

(i) Calculate the required monthly repayment, giving your answer correct to two decimal places.

(ii) After 20 months, she inherits some money and she decides to repay the loan completely at that time. How much will she have to repay, giving your answer correct to the nearest \$?

Muestra 14 P2 (#2)

The first term and the common ratio of a geometric series are denoted, respectively, by a and r where $a, r \in \mathbb{Q}$. Given that the third term is 9 and the sum to infinity is 64, find the value of a and the value of r.

Mayo 14 P2 (TZ1) (#7)

Prove, by mathematical induction, that $7^{8n+3}+2$, $n \in \mathbb{N}$, is divisible by 5

Mayo 14 P2 (TZ2) (#1a)

(i) Halle la suma de todos los números enteros comprendidos entre 10 y 200 que son divisibles entre 7.

(ii) Exprese la suma anterior utilizando notación de sumatoria.

Mayo 14 P2 (TZ2) (#1b)

En una progresión aritmética, el primer término es 1000 y la diferencia común es -6. La suma de los n primeros términos de esta progresión es negativa. Halle el menor valor de n.

Nov 14 P1 (#8)

Utilice la inducción matemática para demostrar que $(2n)! \geq 2^n (n!)^2$, $n \in \mathbb{Z}^+$

Nov 14 P2 (#7)

El séptimo, el tercer y el primer término de una progresión aritmética constituyen los tres primeros términos de una progresión geométrica.

En la progresión aritmética, el primer término es a y la diferencia común, no nula, es d.

(a) Muestre que $d = \frac{a}{2}$.

El séptimo término de la progresión aritmética es 3. La suma de los n primeros términos de la progresión aritmética supera a la suma de los n primeros términos de la progresión geométrica por al menos 200.

(b) Halle el menor valor de n para el cual sucede esto.

Mayo 15 P1 (TZ2) (#12)

La ecuación cúbica $x^3 + px^2 + qx + c = 0$, tiene por raíces α, β, γ. Desarrollando $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$, muestre que

(a) (i) $p = -(\alpha + \beta + \gamma)$;

(ii) $q = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$;

(iii) $c = -\alpha\beta\gamma$.

Ahora se sabe que $p = -6$ y $q = 18$ para los apartados (b) y (c).

(b) (i) En el caso en que las tres raíces α, β, γ forman una progresión aritmética, muestre que una de las raíces es 2.

(ii) A partir de lo anterior, determine el valor de c.

(c) En otro caso, las tres raíces α, β, γ forman una progresión geométrica. Determine el valor de c.

Mayo 15 P1 (TZ2) (#13)

(a) Muestre que $\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, donde $n \geq 0, n \in \mathbb{Z}$.

(b) A partir de lo anterior, muestre que $\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(c) Demuestre, utilizando la inducción matemática, que $\sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{\sqrt{r}} > \sqrt{n}$ para $n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$.

Mayo 15 P1 (TZ1) (#12)

Let $\{u_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, be an arithmetic sequence with first term equal to a and common difference of d, where $d \neq 0$. Let another sequence $\{v_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, be defined by $v_n = 2^{u_n}$.

(a) (i) Show that $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ is a constant.

(ii) Write down the first term of the sequence $\{v_n\}$.

(iii) Write down a formula for v_n in terms of a, d and n.

Let S_n be the sum of the first n terms of the sequence $\{v_n\}$.

(b) (i) Find S_n, in terms of a, d and n.

(ii) Find the values of d for which $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ exists.

You are now told that $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ does exist and is denoted by S_∞.

(iii) Write down S_∞ in terms of a and d.

(iv) Given that $S_\infty = 2^{a+1}$ find the value of d.

Let $\{w_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, be a geometric sequence with first term equal to p and common ratio q, where p and q are both greater than zero. Let another sequence $\{z_n\}$ be defined by $z_n = \ln w_n$.

(c) Find $\sum_{i=1}^{n} z_i$ giving your answer in the form $\ln k$ with k in terms of n, p and q.

Nov 15 P1 (#10)

A given polynomial function is defined as $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$. The roots of the polynomial equation $f(x) = 0$ are consecutive terms of a geometric sequence with a common ratio of $\frac{1}{2}$ and first term 2.

Given that $a_{n-1} = -63$ and $a_n = 16$ find

(a) the degree of the polynomial;

(b) the value of a_0.

Mayo 16 P1 (TZ1) (#1)

The fifth term of an arithmetic sequence is equal to 6 and the sum of the first 12 terms is 45. Find the first term and the common difference.

Mayo 16 P1 (TZ2) (#8)

Utilice la inducción matemática para demostrar que $n\left(n^2 + 5\right)$ es divisible entre 6 para $n \in \mathbb{Z}^+$.

Mayo 16 P2 (TZ2) (#4)

La suma del segundo y el tercer término de una progresión geométrica es igual a 96.

La suma de los infinitos términos de esta progresión es igual a 500.

Halle los posibles valores de la razón común, r.

Nov 16 P1 (#6)

La suma de los n primeros términos de una progresión $\{u_n\}$ viene dada por $S_n = 3n^2 - 2n$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$.

(a) Escriba el valor de u_1.

(b) Halle el valor de u_6.

(c) Demuestre que $\{u_n\}$ es una progresión aritmética, indicando claramente cuál es la diferencia de la progresión.

Nov 16 P2 (#12)

El día que nació, el 1 de enero de 1998, los abuelos de Mary invirtieron $\$x$ en una cuenta de ahorro. A partir de ese momento, fueron depositando $\$x$ todos los meses, el primer día del mes. La cuenta ofrecía un tipo de interés fijo del $0{,}4\%$ mensual. El interés se calculaba el último día de cada mes y se añadía a la cuenta.
Sea $\$A_n$ la cantidad que hay en la cuenta de Mary el último día del mes n-ésimo, justo después de que se haya añadido el interés.

(a) Halle una expresión para A_1 y muestre que $A_2 = 1{,}004^2x + 1{,}004x$.

(b) (i) Escriba una expresión similar para A_3 y otra para A_4.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que la cantidad que había en la cuenta de Mary la víspera del día que cumplió 10 años viene dada por $251(1{,}004^{120} - 1)x$.

(c) Escriba, en función de x, una expresión para A_n en la víspera del día que Mary cumplió 18 años, donde se muestre claramente el valor de n.

(d) Los abuelos de Mary querían que en su cuenta hubiera al menos $\$20\,000$ la víspera del día que cumpliera 18 años. Determine el valor mínimo del depósito mensual $\$x$ que se requiere para conseguir este objetivo. Dé la respuesta aproximando al número entero de dólares más próximo.

(e) Inmediatamente después de cumplir 18 años, Mary decide invertir $\$15\,000$ de este dinero en una cuenta del mismo tipo, obteniendo un $0{,}4\%$ de interés mensual. Todos los años, retira $\$1000$ el día de su cumpleaños, para comprarse un obsequio. Determine cuánto tiempo transcurrirá antes de que no quede dinero en la cuenta.