Examen PAU Junio 2015 Fase General – Matemáticas Aplicadas a las CCSS

Opción A

1. Una persona adquiere en el mercado cierta cantidad de manzanas y naranjas a un precio de m y $1'5$ euros el kilogramo, respectivamente. El importe total de la compra fue de 9 euros y el peso total de la misma de 7 kg.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean la cantidad, en kg, de manzanas y de naranjas adquiridas en el mercado. ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única?

b) ¿Qué cantidad de naranjas habría comprado si el kilogramo de manzanas costase a 1 euro?

x = Kg comprados de manzanas (m €/Kg)
y = " " " naranjas (1'5 €/Kg)

a)

$$\left.\begin{matrix} mx + 1'5y = 9 \\ x + y = 7 \end{matrix}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} m & 1'5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = m - 1'5 \longrightarrow m = 1'5$$

• Si $m \neq 1'5 \Rightarrow \left.\begin{matrix} r(A) = 2 \\ r(A^*) = 2 \\ n = 2 \end{matrix}\right| \Rightarrow$ S. Compatible Determinado (Solución Única)

• Si $m = 1'5 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1'5 & 1'5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad |1'5| \neq 0 \Rightarrow r(A) = 1$

$A^* = \left(\begin{matrix} 1'5 & 1'5 \\ 1 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 9 \\ 7 \end{matrix}\right) \quad \begin{vmatrix} 1'5 & 9 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 10'5 - 9 = 1'5 \neq 0 \Rightarrow r(A^*) = 2$ $\Rightarrow$ S. Incompat. (Sin solución)

$\boxed{\text{Tiene solución para cualquier } m \neq 1'5 \text{ y será única}}$

b) $m = 1$

$$\left.\begin{matrix} x + 1'5y = 9 \\ x + y = 7 \end{matrix}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 1'5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1'5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{9 - 10'5}{1 - 1'5} = \frac{-1'5}{-0'5} = \boxed{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1'5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{7 - 9}{1 - 1'5} = \frac{-2}{-0'5} = \boxed{4}$$

2. Unos grandes almacenenes lanzan una campaña publicitaria con una oferta especial en dos de sus productos, ofreciendo el producto *A* a un precio de 100 euros y el producto *B* a 200 euros. La oferta está limitada por las existencias, que son 20 unidades del producto *A* y 10 unidades del producto *B*, queriendo vender al menos tantas unidades del producto *A* como del *B*. Por otra parte, para cubrir los gastos de esta campaña, los ingresos obtenidos con ella para estos dos productos deben ser, al menos, de 600 euros.

a) ¿Cuántas unidades de cada producto se podrán vender? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían vender 15 unidades de cada producto?

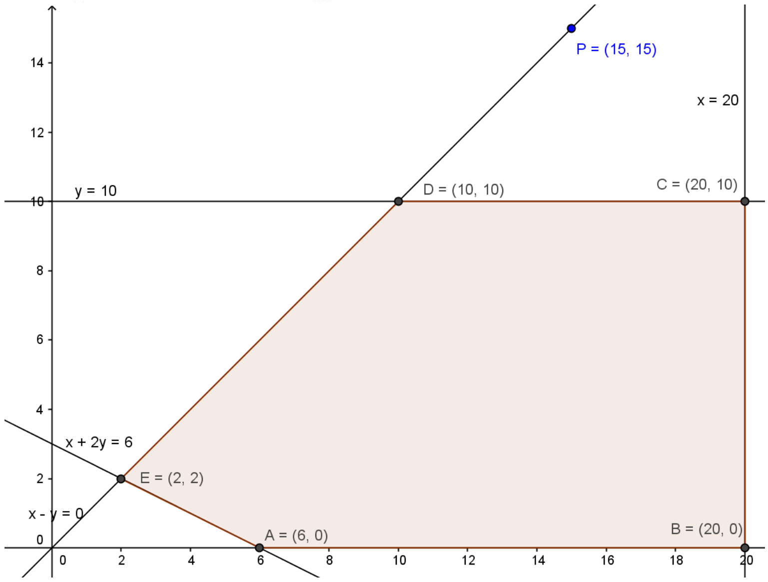
b) ¿Cuántas unidades de cada producto deben vender para maximizar sus ingresos?

x = nº de productos A puestos a la venta

y = nº de productos B puestos a la venta

$$\begin{cases} x \le 20 \\ y \le 10 \\ x \ge y \\ 100x + 200y \ge 600 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \le 20 \\ y \le 10 \\ x \ge y \\ x + 2y \ge 6 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

El número de productos que se pueden vender son los puntos pertenecientes a la zona factible señalada en el gráfico.



No se podrán vender 15 unidades de cada producto ya que, como se ve en el gráfico, dicho punto no pertenece a la zona factible. Es decir, que incumple alguna inecuación, concretamente la segunda.

Objetivo: Maximizar Ingresos.
Función Objetivo: $I = 100x + 200y$

$A(6,\ 0) \rightarrow I = 600€$

$B(20,\ 0) \rightarrow I = 2\,000€$

$C(20,\ 10) \rightarrow I = 4\,000€$

$D(10,\ 10) \rightarrow I = 3\,000€$

$E(2, 2) \rightarrow I = 600€$

Los ingresos máximos alcanzarán los 4 000€ vendiendo 20 unidades de los productos tipo A y 10 unidades de los productos tipo B.

3. El banco Ahorrando ha hecho un estudio sobre el tiempo (en minutos) que dedican sus empleados a los clientes en función de la edad y ha obtenido la siguiente función para clientes entre 18 y 70 años.

$$f(x) = \begin{cases} x^2/10 - 2x + 300 & \text{si } 18 \le x \le 50, \\ -x^2 + 134x - 3750 & \text{si } 50 < x \le 70 \end{cases}$$

a) Estudia y representa la función f. ¿Es continua para $x = 50$?

b) ¿A qué edad los clientes requieren más tiempo de atención? ¿A qué edad requieren el menor tiempo?

a) $y = \frac{x^2}{10} - 2x + 300 \quad (18 \le x \le 50)$

Vértice: $x_v = \frac{+2}{2 \cdot \frac{1}{10}} = 10 \rightarrow y_v = 290$

El vértice está fuera del intervalo $18 \le x \le 50$

x	y
18	296'4
50	450

$y = -x^2 + 134x - 3750 \quad (50 < x \le 70)$

Vértice: $x_v = \frac{-134}{-2} = 67 \rightarrow y_v = 739$

	x	y
	50	450
V.	67	739
	70	730

Vemos que resulta ser continua en $x = 50$ porque:

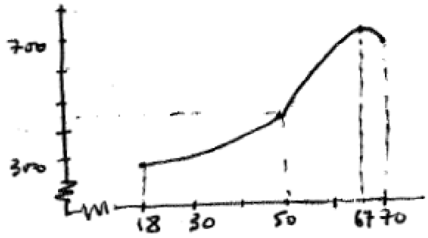
$\lim_{x \to 50^-} f(x) = f(50) = +\frac{50^2}{10} - 2 \cdot 50 + 300 = 450$

$\lim_{x \to 50^+} f(x) = -50^2 - 2 \cdot 50 + 300 = 450$

$\rightarrow f(x)$ continua en $x = 50$

b) El máximo absoluto es en $x = 67$, que será la edad a la que los clientes requieren más tiempo de atención, concretamente 739 min

El mínimo absoluto está en $x = 18$, edad a la que los clientes necesitan menos tiempo, 296'4 min



4. El candidato A se presenta a unas elecciones. En un sondeo previo se preguntó a 500 personas seleccionadas al azar de la población de votantes y 265 de ellas manifestaron su intención de votar a dicho candidato A.

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que el candidato A no va a sacar más del 50 % de los votos, frente a la alternativa de que sí lo va a hacer.

b) ¿A qué conclusión se llega en el contraste anterior para un nivel de significación del 3 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(0'03) = 0'512$, $F(0'97) = 0'834$, $F(1'34) = 0'91$, $F(1'88) = 0'97$, $F(2'17) = 0'985$.)

a) $H_0: p \le 0'50$
$H_a: p > 0'50$
Siendo p la proporción de votos a favor del candidato A.

b) $p_0 = 0'50$

$\hat{p} = \frac{265}{500} = 0'53$

$n = 500$

$\alpha = 3\% \rightarrow z_\alpha = 1'88$

¿$0'53 \in \left(-\infty;\ 0'50 + 1'88\sqrt{\frac{0'50 \cdot 0'50}{500}}\right)$?

$0'53 \in (-\infty, 0'542)$ ✓ Valor no significativo

Al 3% de significación, aceptaremos la hipótesis nula, pensando que la proporción de votos no ha subido del 50%.

Opción B

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} m & -2 \\ m & m-1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Si $A \cdot B = C$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 2$.

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} m & -2 \\ m & m-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx-2y \\ mx+(m-1)y \end{pmatrix}$

$A \cdot B = C \Rightarrow \boxed{\begin{cases} mx-2y=4 \\ mx+(m-1)y=4 \end{cases}}$

b) $M = \begin{pmatrix} m & -2 \\ m & m-1 \end{pmatrix}$

$|M| = m(m-1)+2m = m^2-m+2m = m^2+m$

$|M|=0 \rightarrow m^2+m=0 \;;\; m = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$

• Si $\left.\begin{matrix} m\neq 0 \\ m\neq -1 \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} r(M)=2 \\ r(M^*)=2 \\ m=2 \end{matrix}\right| \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución Única)

• Si $m=0$: $M^* = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{array}\right)$ $\quad \left.\begin{matrix} |2| = 2\neq 0 \Rightarrow r(M)=1 \\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 12\neq 0 \Rightarrow r(M^*)=2 \end{matrix}\right| \Rightarrow$ S. Incompatible (Sin Solución)

• Si $m=-1$: $M^* = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \end{array}\right)$ $\quad \left.\begin{matrix} |-1| = 1\neq 0 \Rightarrow r(M)=1 \\ \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(M^*)=1 \\ m=2 \end{matrix}\right| \Rightarrow$ S. Compatible Indeterminado (Infinitas Soluciones)

| Tiene solución para $m\neq 0$, con solución única salvo para $m=-1$ |

$\underline{m=2}$ $\quad \begin{cases} 2x-2y=4 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ $\quad x = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{12}{6} = \boxed{2}$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{6} = \boxed{0}$

2. Si x representa el volumen de producción de una fábrica, el coste marginal de la misma viene dado por la función $f(x) = 3 + 8x + 15x^2$. Se pide:

a) Encontrar la función del coste total F, si se sabe que dicha función viene dada por la primitiva F de f que verifica que $F(0) = 100$.

b) Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0, \infty)$. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 1$.

$$f(x) = 3 + 8x + 15x^2$$

a) $F(x) = \int (3 + 8x + 15x^2)\,dx = 3x + 4x^2 + 3x^3 + C$

$F(0) = 100 \Rightarrow C = 100$; $\boxed{F(x) = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 100}$

b) $y = 15x^2 + 8x + 3$

$y' = 30x + 8$

$y' = 0 \rightarrow x = -\frac{8}{30} = -\frac{4}{15} \longrightarrow y = 1'9\overline{3}$

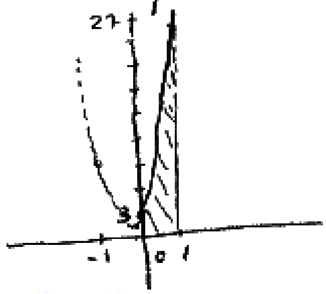
$y = 0 \rightarrow 15x^2 + 8x + 3 = 0$

$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 120}}{30}$ ∄ No corta al eje X

x	y
0	3
1	26
V $-4/15$	$1'9\overline{3}$
-1	10

$\text{Área} = \int_0^1 (15x^2 + 8x + 3)\,dx =$

$= \left[5x^3 + 4x^2 + 3x\right]_0^1 = \boxed{12}$ u.s.



3. Se sabe que en una ciudad el 50 % de la población son hombres, el 30 % de la población consume aceite de girasol y el 20 % son hombres que consumen aceite de girasol. Se elige una persona al azar de dicha ciudad.

a) Si es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que consuma aceite de girasol?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y consuma aceite de girasol?

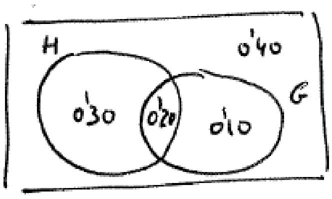
H = "Ser Hombre"

G = "Consumir aceite de Girasol"

$P(H) = 0'50$
$P(G) = 0'30$
$P(H \cap G) = 0'20$

a) $P(G/H) = \frac{P(G \cap H)}{P(H)} = \frac{0'20}{0'50} = \frac{2}{5} = \boxed{0'4}$

b) $P(\overline{H} \cap G) = P(G) - P(G \cap H) = 0'30 - 0'20 = \boxed{0'10}$



ó también:

	H	$\overline{H}$	
G	0'20	0'10	0'30
$\overline{G}$	0'30	0'40	0'70
	0'50	0'50	1

4. Una empresa de suministros electrónicos ha publicitado ampliamente su negocio. El gerente de la misma espera que como resultado de dicha campaña publicitaria las ventas medias semanales pasen a ser mayores de los 7880 € que la empresa ingresó en el pasado. Para comprobar si esto es así, el gerente considera una muestra aleatoria de 36 semanas para las que la media de ventas ha sido de 8023 €. Se supone además que las ventas semanales de esta empresa siguen una distribución normal con una desviación típica de 286 €.

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que la publicidad no ha surtido efecto, frente a la alternativa de que sí lo ha hecho.

b) ¿A qué conclusión se llega en el contraste anterior para un nivel de significación del 1 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(0'01) = 0'504$, $F(0'99) = 0'839$, $F(2'33) = 0'99$, $F(2'58) = 0'995$, $F(3) = 0'999$.)

a) $H_0: \mu \leq 7880$ € Siendo μ la media de ventas semanal
$H_1: \mu > 7880$ €

b) $\mu_0 = 7880$
$\bar{x} = 8023$
$n = 36$
$\sigma = 286$ €
$\alpha = 1\% \rightarrow z_\alpha = 2'33$

¿$8023 \in \left(-\infty, 7880 + 2'33 \cdot \frac{286}{\sqrt{36}}\right)$?

8023 € $\notin (-\infty, 7991)$ Valor significativo

Con un nivel de significación del 1%, rechazamos la hipótesis nula, concluyendo que las ventas semanales sí han subido de 7880 €

Examen PAU Junio 2015 Fase Específica – Matemáticas Aplicadas a las CCSS

Opción A

1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} m & 3 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 3m-1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$ y $E=\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}$.

a) Si $(A\cdot B-C)\cdot D=2\cdot E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m=2$.

a)

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} m & 3 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m & 3m \\ 0 & m\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B-C=\begin{pmatrix} m-0 & 3m-(3m-1) \\ 0-(-1) & m-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m\end{pmatrix}$$

$$(A\cdot B-C)\cdot D=\begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} mx+y \\ x+my\end{pmatrix}$$

$$(A\cdot B-C)\cdot D=2E \Rightarrow \boxed{\begin{cases} mx+y=2 \\ x+my=2\end{cases}}$$

b)

$$M=\begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m\end{pmatrix}$$

$$|M|=m^2-1 \quad ; \quad |M|=0 \longrightarrow m=\pm 1$$

- Si $m\neq \pm 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r(M)=2 \\ r(M^*)=2 \\ m=2\end{array}\right\} \Rightarrow$ S. Compatible Determinado
- Si $m=1$: $M^*=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2\end{array}\right)$ $\left.\begin{array}{l} |1|=1\neq 0 \Rightarrow r(M)=1 \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2\end{vmatrix}=0 \Rightarrow r(M^*)=1 \\ m=2\end{array}\right\} \Rightarrow$ S. Compatible Indeterminado
- Si $m=-1$: $M^*=\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2\end{array}\right)$ $\left.\begin{array}{l} |-1|=-1\neq 0 \Rightarrow r(M)=1 \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2\end{vmatrix}=-4\neq 0 \Rightarrow r(M^*)=2\end{array}\right\} \Rightarrow$ S. Incompat.

Tiene solución para $m\neq -1$, con solución única salvo para $m=1$, con infinitas soluciones

<u>$m=2$</u> $\quad \begin{cases} 2x+y=2 \\ x+2y=2\end{cases}$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\end{vmatrix}}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2\end{vmatrix}}{3}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

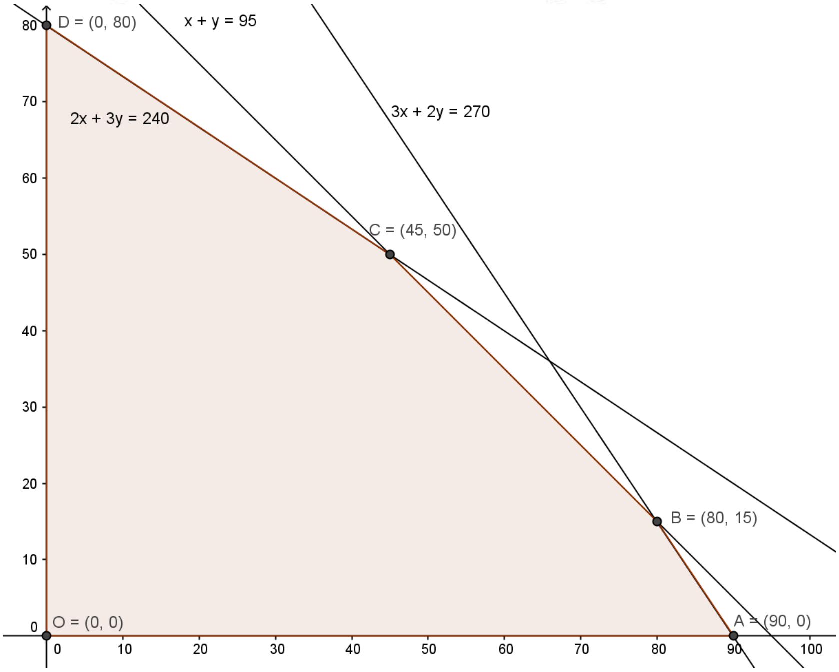
2. Una empresa, que abastece los lotes de perfumería de un supermercado, dispone en el almacén de 240 frascos de gel, 95 de champú y 270 de crema de manos. Los lotes son de dos tipos: A y B, de forma que el lote A está compuesto por 2 frascos de gel, 1 de champú y 3 de crema de manos, mientras que el lote B está formado por 3 frascos de gel, 1 de champú y 2 de crema de manos.

a) ¿Cuántos lotes de cada tipo pueden prepararse con la mercancía que tiene en el almacén? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si cada lote de tipo A le produce unos beneficios de 25 € y cada lote de tipo B de 22 €, ¿cuántos lotes de cada tipo debe preparar para maximizar el beneficio? ¿cuál es el valor del beneficio máximo que puede obtener?

x = nº lotes tipo A preparados
y = nº lotes tipo B preparados

$$\begin{cases} 2x+3y \le 240 \\ x+y \le 95 \\ 3x+2y \le 270 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



El número de lotes que se pueden producir son los puntos pertenecientes a la zona factible señalada en el gráfico. Observamos que las tres rectas se cortan en un mismo punto.

Objetivo: Maximizar Beneficios.
Función Objetivo: $B = 25x + 22y$

$$O(0,\ 0) \to Ben = 0€$$

$$A(90,\ 0) \to Ben = 2\,250€$$

$$B(80, 15) \to Ben = 2\,330€$$

$$C(0,\ 80) \to Ben = 1\,760€$$

El beneficio máximo será de 2 330€ preparando 80 lotes tipo A y 15 lotes tipo B.

3. El salario de un trabajador se relaciona con el tiempo que ha realizado cursos de formación tal como sigue:

$$f(x)=\begin{cases}1000 & \text{si } 0\le x<1\\ 900+100x & \text{si } 1\le x<3\\ 890+\frac{691x+5}{x+2} & \text{si } 3\le x\end{cases}$$

donde x representa el tiempo, en meses, que ha realizado dichos cursos y $f(x)$ el sueldo mensual que cobra.

a) Estudia y representa gráficamente la función f. Comenta dicha gráfica indicando cuál es el sueldo mínimo que cobra y cómo va evolucionando (aumentando o disminuyendo) el sueldo con los meses de formación.

b) Un trabajador, ¿puede llegar alguna vez a cobrar 1500 €? ¿y 1600 €? En caso de que alcance alguno de estos dos sueldos, indica cuántos meses de formación habría recibido.

$$f(x)=\begin{cases}1000 & \text{si } 0\le x<1\\ 900+100x & \text{si } 1\le x<3\\ 890+\frac{691x+5}{x+2} & \text{si } x\ge 3\end{cases} \longrightarrow f'(x)=\begin{cases}0 & \text{si } 0<x<1\\ 100 & \text{si } 1<x<3\\ \frac{691(x+2)-(691x+5)}{(x+2)^2}=\frac{1277}{(x+2)^2} & \text{si } x>3\end{cases}$$

- f es continua en $[0,1)$ por ser una función constante,
- f " " " $(1,3)$ " " " " polinómica,
- f " " " $(3,+\infty)$ " " " " racional y no anularse el denominador, ya que $-2\notin(3,+\infty)$

Veamos ahora $x=1$, $x=3$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to1^-} f(x)=1000\\ f(1)=900+100\cdot1=1000\\ \lim_{x\to1^+} f(x)=900+100\cdot1=1000\end{array}\right\} \longrightarrow f \text{ es continua en } x=1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to3^-} f(x)=900+100\cdot3=1200\\ f(3)=890+\frac{691\cdot3+5}{3+2}=1305'6\\ \lim_{x\to3^+} f(x)=890+\frac{691\cdot3+5}{3+2}=1305'6\end{array}\right\} \longrightarrow f \text{ es discontinua en } x=3 \text{ de tipo salto finito}$$

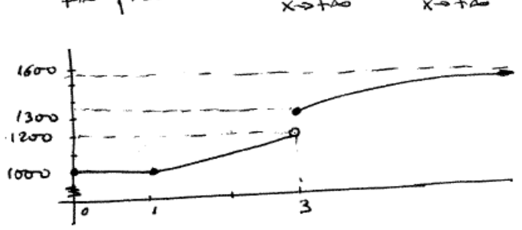
$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases}0=0 \ \checkmark\\ 100=0 \ \text{Absurdo}\\ \frac{1277}{(x+2)^2}=0 \rightarrow 1277=0 \ \text{Absurdo.}\end{cases}$$

	0 – 1	1 – 3	3 – $+\infty$
f'	0	+	+
f	Horiz.	↗	↗

f <u>no decrece</u> en ningún intervalo de su dominio.

x	y
0	1000
1^-	1000
1	1000
3^-	1200
3	1305'6
$+\infty$	1581

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(890+\frac{691x+5}{x+2}\right)=890+\frac{691}{1}=1581$$



Su sueldo mínimo será de 1000 € durante el primer mes de formación. A partir del 1^er mes y hasta el 3°, va aumentando su sueldo linealmente. En el 3^er mes tiene una abrupta subida de 1200 a 1305'6 €, para ir aumentando progresivamente sin subir nunca de 1581 €.

b) Podría llegar a cobrar 1500 €, pero no 1600 €. Su máximo es 1581 €.

$y=1500$ € $\Rightarrow$ $1500=890+\frac{691x+5}{x+2}$; $610=\frac{691x+5}{x+2}$; $610x+1220=691x+5$;

$1215=81x$; $x=15$ $\Rightarrow$ $\boxed{15 \text{ meses}}$ para ganar 1500 €

4. El 60 % de los pedidos de una empresa son realizados por organismos públicos y el resto por organismos privados. En los organismos públicos, el 10 % de los pedidos son pagados al contado, mientras que en los organismos privados este porcentaje es del 25 %.

a) De entre los pedidos de esa empresa, ¿qué porcentaje se paga al contado?

b) De entre los pedidos que se pagan al contado, ¿qué porcentaje son de organismos privados?

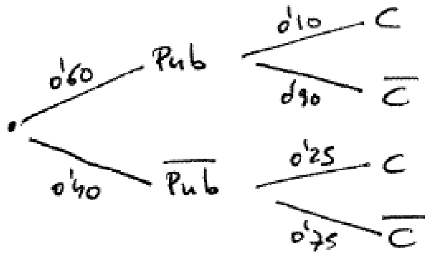
Pub = "pedido realizado por un organismo público"

C = "pedido pagado al contado"

$P(C/Pub) = 0'10$

$P(C/\overline{Pub}) = 0'25$

$P(Pub) = 0'60$



$$\underline{a)}\ P(C) = P(Pub)\cdot P(C/Pub) + P(\overline{Pub})\cdot P(C/\overline{Pub}) = 0'60\cdot 0'10 + 0'40\cdot 0'25 =$$

$$= 0'06 + 0'10 = 0'16 = \boxed{16\%}$$

$$\underline{b)}\ P(Pub/C) = \frac{P(Pub\cap C)}{P(C)} = \frac{P(Pub)\cdot P(C/Pub)}{P(C)} = \frac{0'60\cdot 0'10}{0'16} = \frac{0'06}{0'16} = \frac{6}{16} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

Opción B

1. Una empresa de refrescos produce dos tipos de bebidas: normal y ligera. Cada una de ellas necesita pasar por tres procesos productivos de la fábrica, designados por P_1, P_2 y P_3. El número de horas empleado en cada uno de ellos por lote de refresco producido, así como los beneficios unitarios por lote de refresco vendido, pueden verse en la siguiente tabla:

REFRESCO	Nº DE HORAS EMPLEADAS			BENEFICIOS
	PROCESO P_1	PROCESO P_2	PROCESO P_3	
Normal	6	1	4	650 €
Ligera	8	2	4	800 €

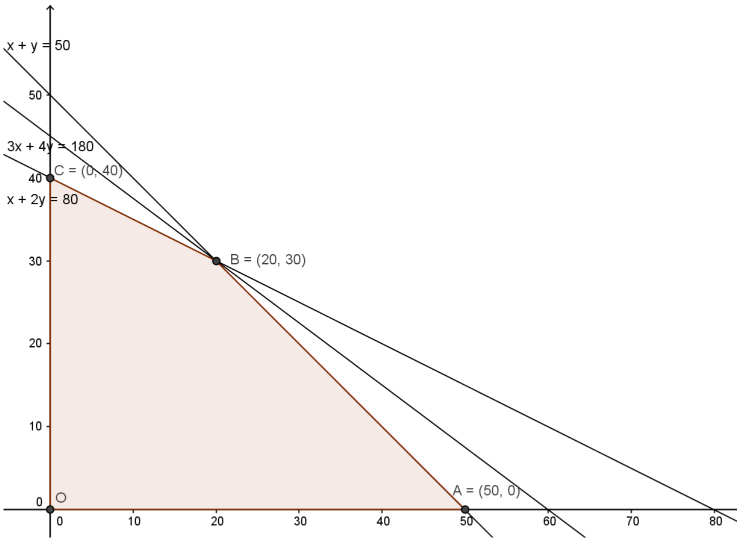
Además se sabe que los tiempos de producción disponibles son de 360 horas para P_1, 80 horas para P_2 y 200 horas para P_3.

a) ¿Cuántos lotes de cada tipo puede producir? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántos lotes de cada tipo tendría que producir para maximizar el beneficio? ¿a cuánto ascendería dicho beneficio?

x = nº lotes producidos de refresco Normal
y = nº lotes producidos de refresco Ligero

$$\begin{cases} 6x+8y \le 360 \\ x+2y \le 80 \\ 4x+4y \le 200 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x+4y \le 180 \\ x+2y \le 80 \\ x+y \le 50 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



El número de lotes que se pueden producir son los puntos pertenecientes a la zona factible señalada en el gráfico. Observamos que las tres rectas se cortan en un mismo punto.

Objetivo: Maximizar Beneficios.
Función Objetivo: $B = 650x + 800y$

$O(0,0) \rightarrow Ben = 0€$

$A(50,0) \rightarrow Ben = 32.500€$

$B(20,30) \rightarrow Ben = 37.000€$

$C(0,40) \rightarrow Ben = 32.000€$

El beneficio máximo será de 37 000€ produciendo 20 lotes de refresco Normal y 30 lotes de refresco Ligero.

2. La función de costes marginales de una empresa es $f(x) = \frac{10}{(x+1)^2}$, se pide:

a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(4) = 0$.

b) Estudiar y representar gráficamente la función f. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 1$.

$$f(x) = \frac{10}{(x+1)^2}$$

a) $F(x) = \int \frac{10}{(x+1)^2}\,dx = 10\int (x+1)^{-2}\,dx = 10\,\frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \frac{-10}{x+1} + C$

$F(4) = 0 \implies 0 = \frac{-10}{4+1} + C \; ; \; C = 2 \; ; \; \boxed{F(x) = 2 - \frac{10}{x+1}}$

b) $y = \frac{10}{(x+1)^2}$ Dominio $= \mathbb{R} - \{-1\}$

$y' = \frac{-10 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-20}{(x+1)^3}$

$y' = 0 \to \frac{-20}{(x+1)^3} = 0 \; ; \; -20 = 0$ ✗ No tiene extremos relativos.

	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		−
y	↗		↘

$\lim_{x \to -\infty} \frac{10}{(x+1)^2} = \frac{10}{+\infty} = 0$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{10}{(x+1)^2} = \frac{10}{+\infty} = 0$ → Asíntota horizontal $y = 0$

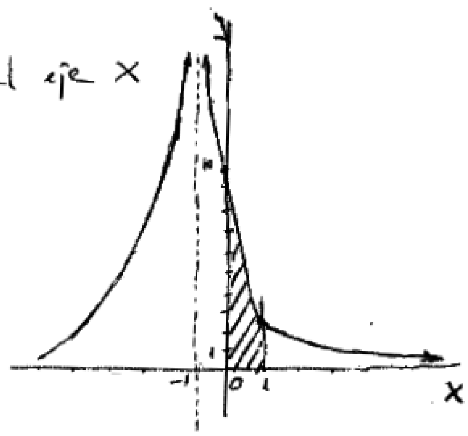
$\lim_{x \to -1^-} \frac{10}{(x+1)^2} = \frac{10}{0^+} = +\infty$
$\lim_{x \to -1^+} \frac{10}{(x+1)^2} = \frac{10}{0^+} = +\infty$ → Asíntota vertical $x = -1$

$y = 0 \to \frac{10}{(x+1)^2} = 0 \; ; \; 10 = 0$ ✗ No corta al eje X

$\text{Area} = \int_0^1 \frac{10}{(x+1)^2}\,dx = \left[\frac{-10}{x+1}\right]_0^1 =$

$= \frac{-10}{2} + \frac{10}{1} = \boxed{5}$ u.s.

x	y
$-\infty$	0
-1^-	$+\infty$
-1^+	$+\infty$
0	10
1	2'5
3	1'25
$+\infty$	0



3. Según un estudio de audiencia, en el último mes se sintonizaron cadenas públicas el 20% del tiempo y el resto cadenas privadas. Dentro de las públicas, el 30% del tiempo se dedica a emisión de películas o series, mientras que dentro de las privadas el porcentaje de emisión de películas o series es del 50%. Según estos datos, si se hubiese seleccionado una televisión al azar entre las encendidas:

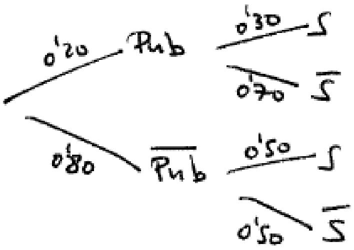
a) ¿Cuál es la probabilidad de que estuviese sintonizando un canal público en el que se estuviese emitiendo una película o serie?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que estuviese sintonizando una película o serie?

Pub = "Tiempo de audiencia de las cadenas públicas"

S : "Tiempo dedicado a Series y Películas"

$P(Pub) = 0'20$
$P(S/Pub) = 0'30$
$P(S/\overline{Pub}) = 0'50$



a) $P(Pub \cap S) = P(Pub) \cdot P(S/Pub) = 0'20 \cdot 0'30 = \boxed{0'06}$

b) $P(S) = P(Pub) \cdot P(S/Pub) + P(\overline{Pub}) \cdot P(S/\overline{Pub}) =$

$= 0'20 \cdot 0'30 + 0'80 \cdot 0'50 = 0'06 + 0'40 = \boxed{0'46}$

4. Una asociación asegura que al menos el 45% de las familias tiene problemas para llegar a fin de mes. Para contrastar dicha afirmación un periódico realiza un estudio con 1000 familias de las cuales 410 aseguran tener problemas para llegar a fin de mes.

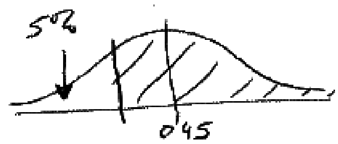
a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que la afirmación de la asociación es correcta, frente a la alternativa de que el porcentaje de familias con problemas para llegar a fin de mes es menor del 45%.

b) ¿A qué conclusión se llega en el contraste anterior para un nivel de significación del 5%?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(0'05) = 0'52$, $F(0'95) = 0'83$, $F(1'64) = 0'95$, $F(1'96) = 0'975$, $F(2'54) = 0'994$.)

a) $H_0 : p \geq 0'45$
$H_a : p < 0'45$
Siendo p la proporción de familias con problemas a fin de mes

b) $p_0 = 0'45$
$\hat{p} = \frac{410}{1000} = 0'41$
$n = 1000$
$\alpha = 5\% \rightarrow z_\alpha = 1'64$



¿ $0'41 \in \left(0'45 - 1'64\sqrt{\frac{0'45 \cdot 0'55}{1000}}, +\infty\right)$?

$0'41 \notin (0'424, +\infty)$ Valor Significativo

Al 5% de significación, rechazaremos la hipótesis nula, aceptando que la proporción de familias con problemas a fin de mes SÍ ha bajado del 45%.