Examen PAU de Asturias Julio 2013 Fase General – Matemáticas Aplicadas a las CCSS

Opción A

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} m \cdot y & -1 \\ 2-2\cdot x & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -m \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 2 & y \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix}$.

a) Si $A \cdot B + C \cdot D = D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 1$.

a)

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} my & -1 \\ 2-2x & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -my+m \\ -2+2x-2m \end{pmatrix}$$

$$C\cdot D = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 2 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx-m \\ 2m+my \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B + C\cdot D = D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -my+\cancel{m}+mx-\cancel{m}=m \\ -2+2x-\cancel{2m}+\cancel{2m}+my=m \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} mx-my=m \\ 2x+my=m+2 \end{array}\right\}$$

b)

$$M = \begin{pmatrix} m & -m \\ 2 & m \end{pmatrix}$$

$$|M| = m^2+2m \;; \quad |M|=0 \Rightarrow m^2+2m=0 \;; \quad m = \frac{-2\pm\sqrt{4}}{2} = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$$

- Si $\left.\begin{array}{l} m\neq 0 \\ m\neq -2 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r(M)=2 \\ r(M^*)=2 \\ n=2 \end{array}\right| \Rightarrow$ S.C. Determinado

- Si $m=0 \rightarrow |2| = 2\neq 0 \Rightarrow r(M)=1$

  $M^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(M^*)=1$, $n=2$ $\Bigg\} \Rightarrow$ S. Compatible Indeterminado

- Si $m=-2 \rightarrow |2| = 2\neq 0 \Rightarrow r(M)=1$

  $M^* = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ \boxed{2} & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\neq 0 \Rightarrow r(M^*)=2$ $\Bigg\} \Rightarrow$ Sistema Incompatible

Por lo tanto, el sistema carece de soluciones para $m=-2$. Para $m=0$ tendrá infinitas soluciones, y si $\begin{array}{l} m\neq 0 \\ m\neq -2 \end{array}$ tendrá solución única.

$m=1$:

$$\left.\begin{array}{l} x-y=1 \\ 2x+y=3 \end{array}\right\}$$
$$3x = 4 \rightarrow x = 4/3 \;; \quad y = 1/3$$

$\boxed{\begin{array}{l} x=4/3 \\ y=1/3 \end{array}}$ es la solución

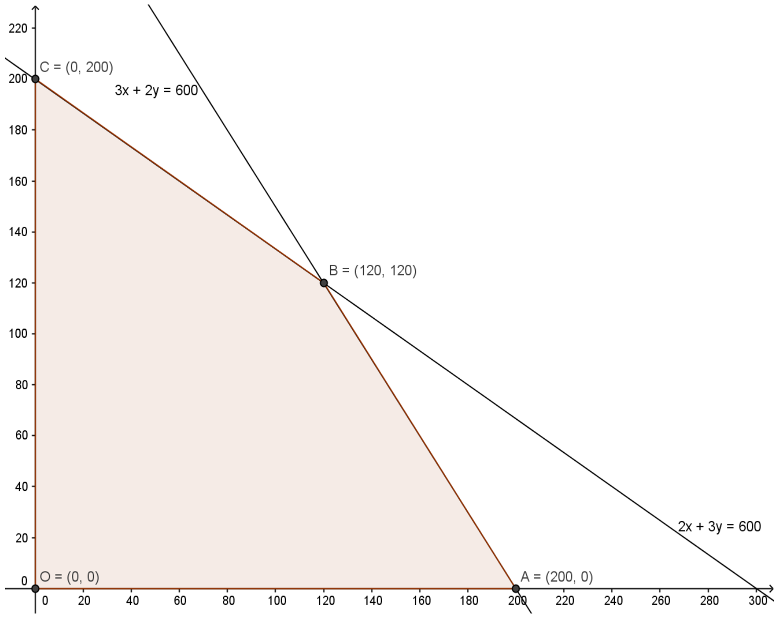
2. Un joyero fabrica dos tipos de pendientes. Los de tipo A están compuestos de 2 g de oro y 3 g de plata y los vende a 100 euros cada uno. Los de tipo B están compuestos por 3 g de oro y 2 g de plata y los vende a 200 euros. Al principio de una semana, dispone de 600 g de cada uno de los metales.

a) ¿Cuántos pendientes de cada tipo puede fabricar esa semana? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántos pendientes de cada tipo debe fabricar para maximizar los ingresos, si se supone que vende todo lo que fabrica? ¿y para que el número de pendientes fabricados sea máximo?

x = nº pendientes fabricados tipo A
y = nº pendientes fabricados tipo B

$$\begin{cases} 2x+3y \le 600 \\ 3x+2y \le 600 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



El número de pendientes de cada tipo que pueden fabricar semanalmente se corresponden con los puntos pertenecientes a la zona factible señalada en el gráfico.

1er Objetivo: Maximizar Ingresos

Función Objetivo:

$I = 100x + 200y$

$O(0, 0) \rightarrow I = 0€$

$A(200, 0) \rightarrow I = 20\,000€$

$B(120, 120) \rightarrow I = 36\,000€$

$C(0, 200) \rightarrow I = 40\,000€$

Maximizaría sus ingresos fabricando 200 pendientes tipo B y ninguno tipo A, así conseguiría subir sus ingresos a 40 000€.

2º Objetivo: Maximizar el nº total de pendientes fabricados

Función Objetivo: $N = x + y$

$O(0, 0) \rightarrow N = 0$

$A(200, 0) \rightarrow N = 200$

$B(120, 120) \rightarrow N = 240$

$C(0, 200) \rightarrow N = 200$

Si pretende conseguir el mayor número de pendientes posible debería fabricar 120 pendientes tipo A y 120 pendientes tipo B. Obviamente serían 240 pendientes en total.

3. Se lanza una pelota hacia arriba desde lo alto de una torre. La trayectoria que describe la pelota viene dada por la siguiente expresión ($f(x)$ representa la altura a la que se encuentra la pelota, en metros, y x es el tiempo transcurrido, en segundos, desde su lanzamiento):

$$f(x) = 20x - 5x^2 + 60, \qquad x \geq 0.$$

a) Dibuja la gráfica de la función f. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota y en qué momento lo hace?

b) ¿Desde qué altura se lanza la pelota?, ¿cuánto tiempo tarda la pelota en caer al suelo?

$f(x) = 20x - 5x^2 + 60 \;;\; x \geq 0$

$f'(x) = 20 - 10x$

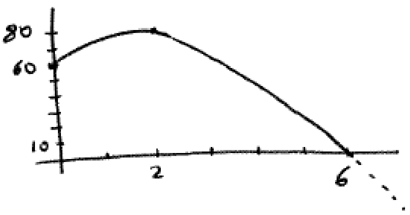
$f'(x) = 0 \longrightarrow x = 2$

	0	2	$+\infty$
f'	+	−	
f	↗	↘	

x	y
0	60
2	80
6	0

$\longleftarrow y = 0 \Rightarrow 20x - 5x^2 + 60 = 0$

$x = \dfrac{-20 \pm \sqrt{400 + 1200}}{-10} = \dfrac{-20 \pm 40}{-10} = \begin{cases} \cancel{-2} & \text{porque no es } \geq 0 \\ 6 \end{cases}$



a) la altura máxima es de 80m, que alcanza a los 2 segundos

b) Para $(x=0)$, la altura es de 60m, en que lanzamos la pelota.
Llega al suelo $(y=0)$ a los 6 segundos de lanzarla.

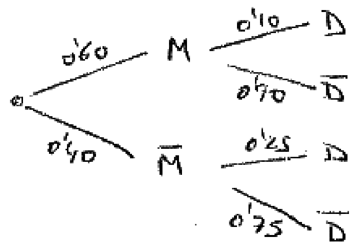
4. El 60 % de los empleados de una empresa son mujeres. De ellas, un 10 % ocupa puestos directivos, mientras que el 25 % de los hombres ocupa puestos directivos.

a) De entre los empleados de esa empresa, ¿qué porcentaje son directivos?

b) De entre los que son directivos, ¿qué porcentaje son mujeres?

M = "empleados mujeres"
D = "directivo"

$P(M) = 0'60$
$P(D/M) = 0'10$
$P(D/\bar{M}) = 0'25$



a) $P(D) = P(M) \cdot P(D/M) + P(\bar{M}) \cdot P(D/\bar{M}) = 0'60 \cdot 0'10 + 0'40 \cdot 0'25 = 0'16 = \boxed{16\%}$

b) $P(M/D) = \dfrac{P(M \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(M) \cdot P(D/M)}{P(D)} = \dfrac{0'6 \cdot 0'1}{0'16} = 0'375 = \boxed{37{,}5\%}$

Opción B

1. Una persona debe alimentar a un animal exótico que acaba de comprar. En la tienda de mascotas le comentan que hay dos tipos de pienso, A y B, para dicho animal, con las siguientes composiciones y precios por paquete:

MARCA	PROTEÍNAS	HIDRATOS DE CARBONO	GRASAS	PRECIO
A	1 g	5 g	3 g	2 euros
B	2 g	2 g	2 g	1′7 euros

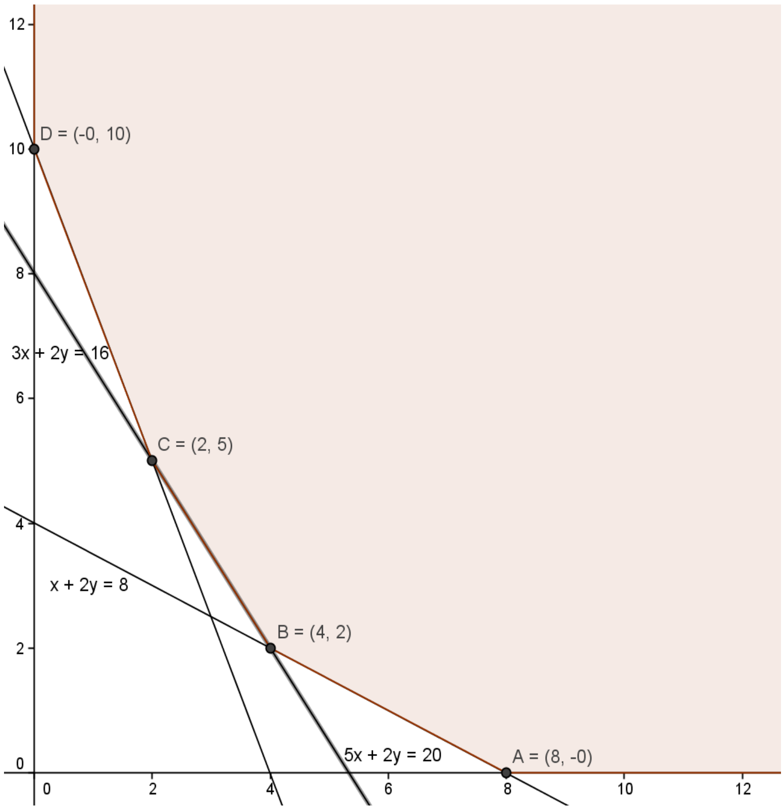
Dicho animal debe comer diariamente, para estar correctamente alimentado, al menos 8 g de proteínas, 20 g de hidratos de carbono y 16 g de grasas.

a) ¿Cuántos paquetes de cada tipo puede comer el animal para estar correctamente alimentado? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántos tendría que comer de cada tipo para obtener la dieta deseada al mínimo coste? ¿A cuánto ascendería dicho coste?

x = nº paquetes tipo A que debe comer
y = nº paquetes tipo B que debe comer

$$\begin{cases} x+2y\geq 8 \\ 5x+2y\geq 20 \\ 3x+2y\geq 16 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$



El número de paquetes que se utilizar para alimentar al animal son los puntos pertenecientes a la zona factible señalada en el gráfico. Observamos que se trata de una región abierta, que incluye soluciones infinitas para ambas incógnitas.

Objetivo: Minimizar Costes.
Función Objetivo: $Coste = 2x + 1{,}7y$

Es obvio que las soluciones infinitas no minimizarían los costes, sino lo contrario.

$A(8,0) \rightarrow Coste = 13{,}60€$

$B(4,2) \rightarrow Coste = 11{,}40€$

$B(2,5) \rightarrow Coste = 12{,}50€$

$D(0,10) \rightarrow Coste = 17€$

El coste mínimo diario será de 11,40€ utilizando en la alimentación 4 paquetes tipo A y 2 tipo B

2. Dada la función $f(x) = \frac{2}{x}$, se pide:

a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 2$.

b) Representar gráficamente la función f y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = e$ y $x = e^2$.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ $\quad \text{dom} f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = \int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln x + C \\ F(1) = 2 \Rightarrow 2 = 2\ln 1 + C\ ;\ C = 2 \end{array}\right\} F(x) = \boxed{2\ln x + 2}$$

b) $y = \frac{2}{x}$

$x = 0 \rightarrow y = \frac{2}{0}$ Absurdo $\qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{2}{x} = \frac{2}{-0} = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x} = \frac{2}{+0} = +\infty$

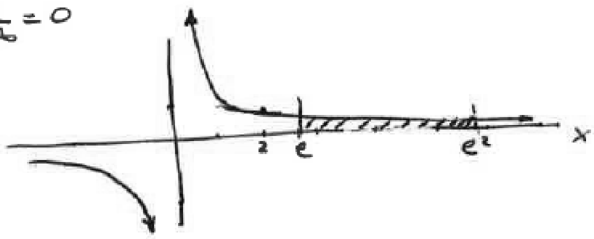
$y = 0 \rightarrow 0 = \frac{2}{x}\ ;\ 0 = 2$ Absurdo

$y' = \frac{-2}{x^2}$

$y' = 0 \rightarrow \frac{-2}{x^2} = 0\ ;\ -2 = 0$ Absurdo

	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y	$\searrow$		$\searrow$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{-\infty} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{+\infty} = 0$



$$\text{Area} = \int_e^{e^2} \frac{2}{x}\,dx = \left[2\ln x\right]_e^{e^2} = 2\ln e^2 - 2\ln e = 2\cdot 2 - 2\cdot 1 = \boxed{2\ \text{u.s.}}$$

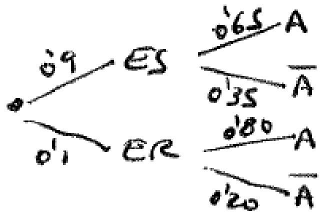
3. Una Escuela Universitaria tiene el presente curso 900 alumnos españoles y 100 alumnos del programa Erasmus. Se sabe además que aprobaron el primer examen de matemáticas el 65 % de los estudiantes españoles y el 80 % de los estudiantes del programa Erasmus. Si se elige un alumno al azar de dicha escuela:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea Erasmus y haya aprobado el primer examen de matemáticas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado el primer examen de matemáticas?

ES = "alumno Español" A = "aprobar"

ER = " " ERasmus"



$P(ES) = \frac{900}{1000} = 0'9$ | $P(A/ES) = 0'65$

$P(ER) = \frac{100}{1000} = 0'1$ | $P(A/ER) = 0'80$

a) $P(ER \cap A) = 0'1 \cdot 0'80 = \boxed{0'08}$

b) $P(A) = 0'9 \cdot 0'65 + 0'1 \cdot 0'80 = \boxed{0'665}$

4. Un laboratorio farmacéutico afirma que el tratamiento con uno de sus productos es capaz de eliminar los problemas de insomnio en al menos un 80 % de los pacientes. Para contrastar dicha afirmación un laboratorio de la competencia realiza un estudio con 100 personas con problemas de insomnio a los que les suministra el tratamiento con dicho fármaco y observa que 78 han dejado de sufrir esa patología.

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que el laboratorio decía la verdad, frente a la alternativa de que el porcentaje de pacientes que dejan de padecer insomnio es menor del 80 %.

b) ¿A qué conclusión se llega en el contraste anterior para un nivel de significación del 5 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(0'05) = 0'52$, $F(0'5) = 0'69$, $F(0'95) = 0'83$, $F(1'64) = 0'95$, $F(1'96) = 0'975$.)

a) $H_0 : p \geq 0'80$ | siendo p la proporción de pacientes a los que
$H_a : p < 0'80$ | el producto cura el insomnio.

b) $p_0 = 0'80$

$\hat{p} = \frac{78}{100} = 0'78$

$n = 100$

$\alpha = 5\% \rightarrow Z_\alpha = 1'64$

$¿0'78 \in \left(0'80 - 1'64 \cdot \sqrt{\frac{0'80 \cdot 0'20}{100}}, +\infty\right)$?

$0'78 \in (0'7344, +\infty)$ ✓ Valor no significativo.

Al 5% de significación, aceptamos la hipótesis nula, y pensamos que la proporción de pacientes no ha bajado del 80%

Examen PAU de Asturias Julio 2013 Fase Específica – Matemáticas Aplicadas a las CCSS

Opción A

1. En una fábrica trabajan a dos turnos diarios. En el turno de mañana se producen m piezas más que en el de la tarde. Además se sabe que el beneficio económico que obtienen por cada pieza fabricada es de m euros y que los beneficios diarios son de 5025 euros.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de piezas producidas en cada turno.

b) Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que el beneficio por pieza sea de 5 euros? En caso afirmativo, ¿cuántas piezas se producen diariamente en la fábrica?

a) x = nº piezas producidas en el turno de mañana → mx € de beneficios
y = " " " " " " Tarde → my € " "

$$\left.\begin{array}{l} x = m+y \\ mx+my=5025 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=m \\ mx+my=5025 \end{array}\right\}$$

b) $M=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & m \end{pmatrix}$

$|M| = m+m = 2m \rightarrow m=0$

- Si $m\neq 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r(M)=2 \\ r(M^*)=2 \\ n=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ S. Compatible Determinado.

- Si $m=0 \rightarrow |1| = 1 \neq 0 \Rightarrow r(M)=1$
$M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5025 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5025 \end{vmatrix} = 5025 \neq 0 \Rightarrow r(M^*)=2 \Big\} \Rightarrow$ Sistema Incompatible

$\boxed{\text{Por lo tanto, sí puede ser } m=5\text{, ya que el sistema tiene solución para cualquier } m\neq 0}$

$m=5$: $\left.\begin{array}{l} x-y=5 \\ 5x+5y=5025 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 5025 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}} = \dfrac{5050}{10} = 505 \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 5025 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}} = \dfrac{5000}{10} = 500 \end{array}\right\}$$

$\boxed{\begin{array}{l} 505 \\ +500 \\ \hline 1005 \text{ piezas producidas diariamente} \end{array}}$

2. En determinada compañía se sabe que hay al menos tantos delineantes como arquitectos. Además se sabe que al menos hay 5 delineantes y que el número total de empleados entre los dos grupos es como mucho de 20 personas.

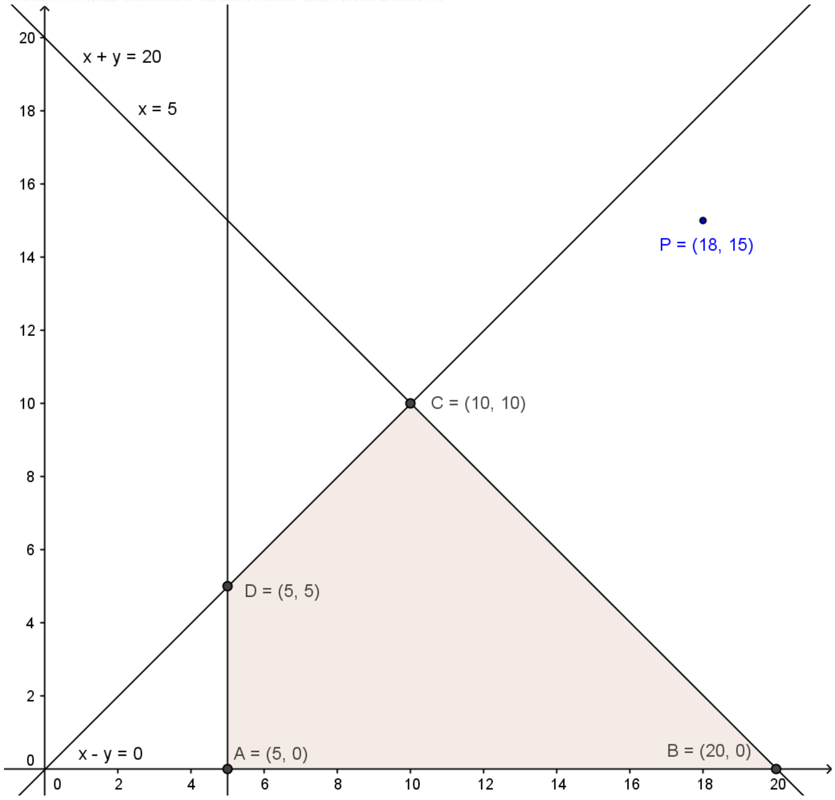
a) ¿Cuántos empleados de cada tipo tiene la empresa? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría haber 18 delineantes y 15 arquitectos?

b) Si cada delineante cobra mensualmente 1500 euros y cada arquitecto 3000 euros, ¿cuántos empleados de cada tipo tiene que haber en la empresa para minimizar el coste total de sus salarios?

x = nº delineantes

y = nº arquitectos

$$\begin{cases} x \geq y \\ x \geq 5 \\ x + y \leq 20 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



El número de empleados de cada tipo que puede tener la empresa se corresponden con los puntos pertenecientes a la zona factible señalada en el gráfico.

No podrían contratar 18 delineantes y 15 arquitectos ya que, como se ve en el gráfico, dicho punto no pertenece a la zona factible. Es decir, que incumple alguna inecuación, concretamente la tercera.

Objetivo: Minimizar Costes.

Función Objetivo:
$C = 1\,500x + 3\,000y$

$A(5, 0) \rightarrow Coste = 7\,500€$

$B(20, 0) \rightarrow Coste = 30\,000€$

$C(10, 10) \rightarrow Coste = 45\,000€$

$D(5, 5) \rightarrow Coste = 22\,500€$

Minimizarán los costes contratando únicamente 5 delineantes y ningún arquitecto. Así pagarán 7 500€ en salarios

3. Dada la función $f(x) = 8x - 2x^3$, se pide:

a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 9$.

b) Representar gráficamente la función f y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 3$.

a) $f(x) = 8x - 2x^3$

$F(x) = \int (8x - 2x^3)\,dx = 4x^2 - \frac{2x^4}{4} + C = 4x^2 - \frac{x^4}{2} + C$

$F(2) = 9 \Rightarrow 9 = 4\cdot 4 - \frac{16}{2} + C \;;\; C = 1$

$F(x) = \boxed{4x^2 - \frac{x^4}{2} + 1}$

b) $y = 8x - 2x^3$

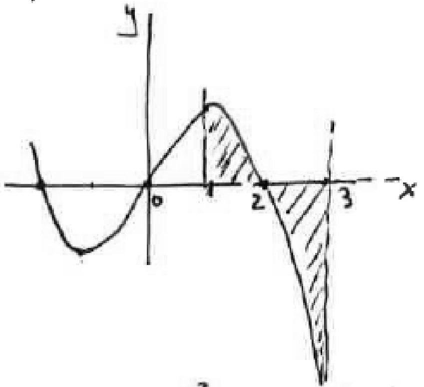
$x = 0 \rightarrow y = 0$

$y = 0 \rightarrow 8x - 2x^3 = 0 \;;\; 2x(4 - x^2) = 0 \;;\; x = \begin{cases} 0 \\ \pm 2 \end{cases}$

$y' = 8 - 6x^2$

$y' = 0 \Rightarrow 0 = 8 - 6x^2 \;;\; 6x^2 = 8 \;;\; x^2 = \frac{4}{3} \;;\; x = \pm\sqrt{4/3}$

	$-\sqrt{4/3}$		$\sqrt{4/3}$	
$-$		$+$		$-$
$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$



x	y
0	0
2	0
−2	0
MIN $-\sqrt{4/3}$	$-32/3\sqrt{3}$
MAX $\sqrt{4/3}$	$+32/3\sqrt{3}$
1	6
3	−30

$\text{Area} = \int_1^2 f(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx = \left[4x^2 - \frac{x^4}{2}\right]_1^2 - \left[4x^2 - \frac{x^4}{2}\right]_2^3 =$

$= \left(4\cdot 4 - \frac{16}{2}\right) - \left(4\cdot 1 - \frac{1}{2}\right) - \left(4\cdot 9 - \frac{81}{2}\right) + \left(4\cdot 4 - \frac{16}{2}\right) = \boxed{17 \text{ u.s.}}$

4. Se sabe por estudios anteriores que el 1 % de los niños de una región sufre determinada patología y además no habla. Entre los que sufren dicha patología, un 20 % no habla. Si se selecciona un niño al azar de dicha región,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sufra dicha patología?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sufra dicha patología y hable?

E = "niño con determinada enfermedad"
H = "niño que habla"

$P(E \cap \overline{H}) = 0'01$

a) $P(\overline{H}/E) = 0'20 \longrightarrow P(\overline{H}/E) = \frac{P(E\cap\overline{H})}{P(E)} \Rightarrow P(E) = \frac{P(E\cap\overline{H})}{P(\overline{H}/E)} = \frac{0'01}{0'20} = \boxed{0'05}$

b) $P(E \cap H) = P(E)\cdot P(H/E) = P(E)\cdot[1 - P(\overline{H}/E)] = 0'05\cdot(1 - 0'20) = \boxed{0'04}$

Opción B

1. En un almacén se quieren tener al menos tantas bombillas de tipo A como de tipo B y nunca más de 40 bombillas de tipo A. Según las especificaciones, las de tipo A duran 1000 horas y las de tipo B 2000 horas y se quiere que la suma de las duraciones de todas las bombillas que haya en el almacén sea al menos de 30000 horas.

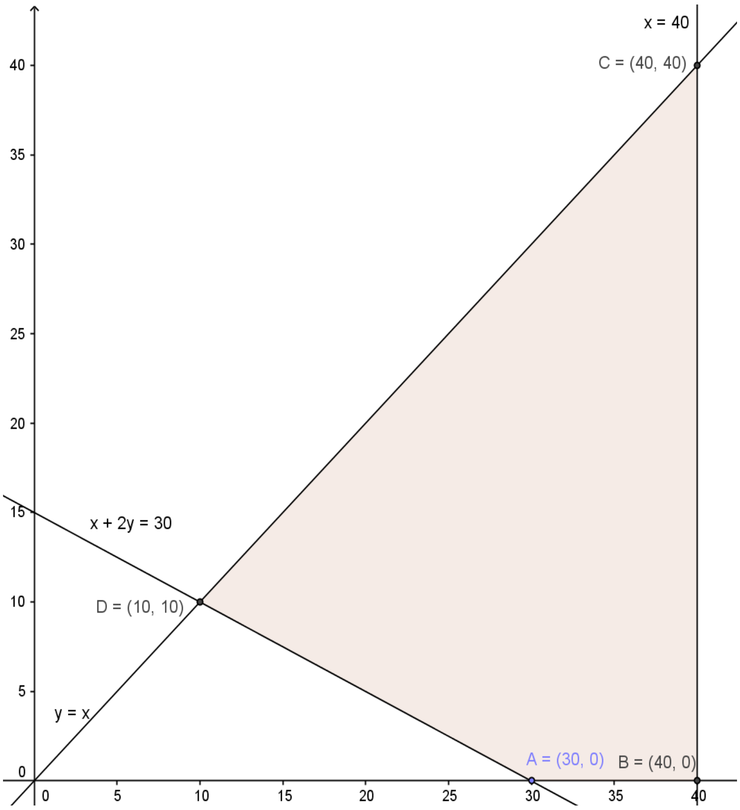
a) ¿Cuántas bombillas de cada tipo hay en el almacén? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si el coste de cada bombilla de tipo A es de 6 euros y de cada bombilla de tipo B es de 10 euros, ¿cuántas bombillas de cada tipo deberían tener almacenadas para minimizar el coste total de las mismas? ¿Cuánto sería dicho coste?

x = nº bombillas tipo A almacenadas

y = nº bombillas tipo B almacenadas

$$\begin{cases} x \geq y \\ x \leq 40 \\ 1000x + 2000y \geq 30000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq y \\ x \leq 40 \\ x + 2y \geq 30 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



El número de bombillas de cada tipo que pueden tener en el almacén se corresponden con los puntos pertenecientes a la zona factible señalada en el gráfico.

Objetivo: Minimizar Costes.

Función Objetivo: $C = 6x + 10y$

$A(30, 0) \rightarrow Coste = 180€$

$B(40, 0) \rightarrow Coste = 240€$

$C(40, 40) \rightarrow Coste = 640€$

$D(10, 10) \rightarrow Coste = 160€$

Minimizarán los costes almacenando 10 bombillas tipo A y 10 bombillas tipo B que costarían 160€.

2. El rendimiento de un estudiante en un examen de una hora de duración viene dado por la siguiente expresión ($f(x)$ representa el rendimiento, en tanto por ciento, en el instante x, medido en horas):

$$f(x) = \begin{cases} 300x(1-x) & \text{si } 0 \le x \le 0'6, \\ 180(1-x) & \text{si } 0'6 < x \le 1. \end{cases}$$

a) ¿Es el rendimiento una función continua del tiempo?

b) ¿En qué momentos aumenta y en qué momentos disminuye el rendimiento? ¿Cuándo obtiene el mayor rendimiento y cuál es ese rendimiento?

$$f(x) = \begin{cases} 300x(1-x) & \text{si } 0 \le x \le 0'6 \\ 180(1-x) & \text{si } 0'6 < x \le 1 \end{cases}$$

a) $300x(1-x)$, $180(1-x)$ son continuas porque son polinómicas.

Veamos en $x = 0'6$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0'6^-} f(x) = 300 \cdot 0'6(1-0'6) = 72 \\ f(0'6) = 300 \cdot 0'6(1-0'6) = 72 \\ \lim\limits_{x \to 0'6^+} f(x) = 180(1-0'6) = 72 \end{array}\right| \Rightarrow \text{es continua en } x = 0'6$$

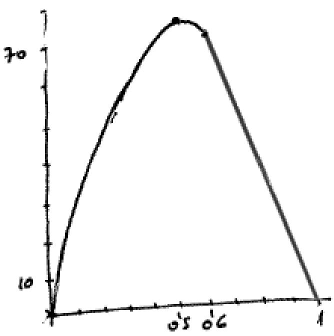
Por lo tanto el rendimiento es continuo en el tiempo.

b) $$f'(x) = \begin{cases} 300(1-x) + 300x \cdot (-1) \\ 180 \cdot (-1) \end{cases} = \begin{cases} -600x + 300 & \text{si } 0 < x < 0'6 \\ -180 & \text{si } 0'6 < x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \longrightarrow \begin{cases} -600x + 300 = 0 \Rightarrow x = 0'5 \checkmark \text{ (vale porque } 0 < 0'5 < 0'6) \\ -180 = 0 \quad \times \end{cases}$$

	0 — 0'5	0'5 — 0'6	0'6 — 1
f	+	−	−
f'	↗	↘	↘

x	y
0	0
0'5	75
0'6	72
$0'6^+$	72
1	0



El rendimiento aumenta la 1ª media hora, para disminuir a continuación hasta el final del examen.

El mayor rendimiento es 75 para $x = 0'5$ h

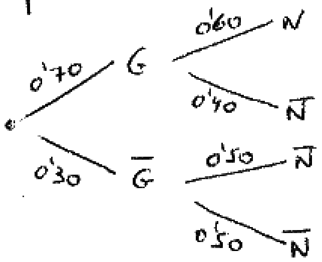
3. En una escuela de esquí, el 30 % de las clases son particulares y el resto son clases de grupo. De las clases particulares, el 50 % son a niños, mientras que de las clases de grupo, el 60 % son a niños.

a) ¿Qué porcentaje de las clases son de grupo y a niños?

b) ¿Qué porcentaje de las clases son a niños?

G = "clase de grupo"
N = "niño"

$P(\overline{G}) = 0'30$
$P(N/\overline{G}) = 0'50$
$P(N/G) = 0'60$



a) $P(G \cap N) = P(G)\cdot P(N/G) = 0'40 \cdot 0'60 = 0'24 = \boxed{24\%}$

b) $P(N) = P(G)\cdot P(N/G) + P(\overline{G})\cdot P(N/\overline{G}) = 0'70\cdot 0'60 + 0'30 \cdot 0'50 = 0'57 = \boxed{57\%}$

4. El tiempo medio empleado por un operario para ensamblar una pieza era de 3 minutos. Para analizar si su eficacia ha mejorado después de haber asistido a un curso de formación, se ha tomado una muestra aleatoria de 36 piezas, obteniéndose que el tiempo medio empleado por dicho operario para ensamblar estas piezas fue de $2'5$ minutos. Se sabe además que el tiempo de ensamble sigue una distribución normal con desviación típica 1 minuto.

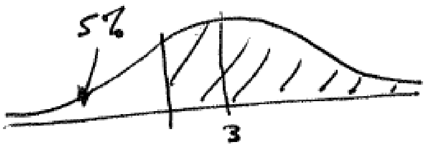
a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que el curso de formación no ha dado los resultados esperados, frente a la alternativa de que sí ha conseguido reducir el tiempo medio de ensamblado.

b) ¿A qué conclusión se llega en el contraste anterior para un nivel de significación del 5 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(0'05) = 0'52$, $F(0'95) = 0'83$, $F(1'64) = 0'95$, $F(1'96) = 0'975$, $F(3) = 0'999$)

a) $H_0 : \mu \geq 3$
$H_a : \mu < 3$
Siendo μ los minutos que emplea un operario en ensamblar una pieza.

b) $\mu_0 = 3$ min
$\sigma = 1$ min
$\overline{x} = 2'5$ min
$n = 36$
$\alpha = 5\% \rightarrow z_\alpha = 1'64$



¿ $2'5 \in \left(3 - 1'64 \cdot \frac{1}{\sqrt{36}}, +\infty\right)$?

$2'5 \notin (2'7267, +\infty)$ Valor significativo

La media muestral ha resultado significativamente (5%) baja. Pensamos entonces que debemos rechazar la hipótesis nula y creer que el nº de minutos necesarios para ensamblar la pieza es menor de 3.