ECUACIONES NO POLINÓMICAS Y CALCULADORA GRÁFICA

2 MÉTODOS: ANALÍTICO Y GRÁFICO (se recomienda éste último)

A) MÉTODO ANALÍTICO

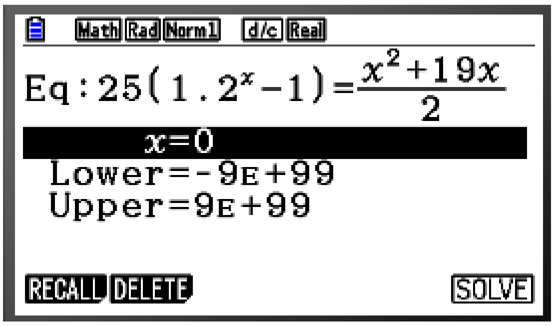
Ejemplo

Resuelve la siguiente ecuación:

$$25(1.2^n - 1) = \frac{n^2 + 19n}{2}$$

Menú ➔Ecuación➔F3(SOLVER)

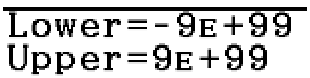
Se escribe la ecuación:



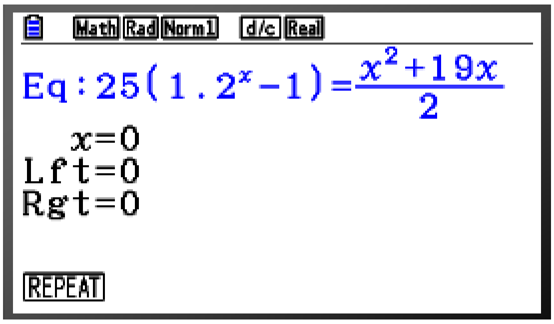
El signo igual se escribe mediante SHIFT y a continuación la tecla del . decimal, a la derecha de la tecla del 0.

La calculadora utiliza el método de Newton. Debemos decirle en que intervalo queremos que busque las soluciones**. Halla exclusivamente de una en una.** Así que si hubiera más debemos indicarle otra búsqueda. Además no sabemos desde donde se aproximará a la solución, si desde la derecha o desde la izquierda. Sigamos con el ejemplo y veamos el procedimiento:

Debemos resaltar con el cursor la incógnita a buscar 

Este es el rango inicial de búsqueda, un número lo suficientemente bajo para la calculadora, y lo suficientemente alto: 

Tecleamos **F6(SOLVE) y:**

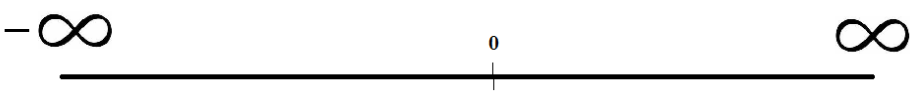


Ha hallado una solución X=0

Ha evaluado el valor del miembro de la izquierda (lft) para ese valor (x=0) y da 0

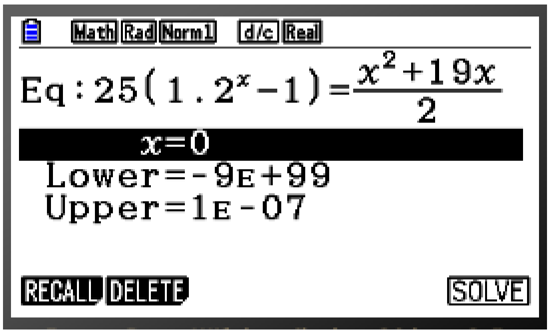
Y coincide con el valor del miembro de la derecha (Rgt) para x=0, y es también 0.

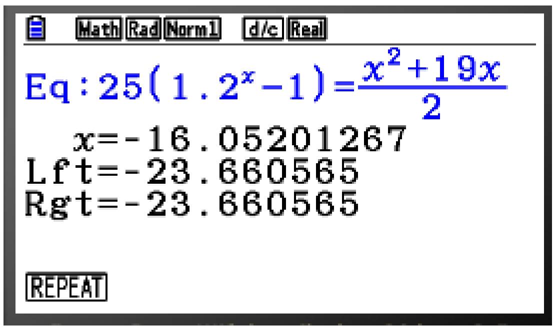
Pero no hemos terminado, como hemos dicho evalua cada posible solución una a una, como ha encontrado x=0, debemos pensar que se divide la recta real en 2 partes, hay que comprobar que no quede ninguna solución en ninguna de ellas, repitiendo el procedimiento una y otra vez, hasta que estemos seguros de no pasar por alto ninguna solución.



Buscaremos ahora en el intervalo (-∞,0):

F1(REPEAT) y rellenamos el intervalo de búsqueda correspondiente, cursor sobre la x.
F6(SOLVE)

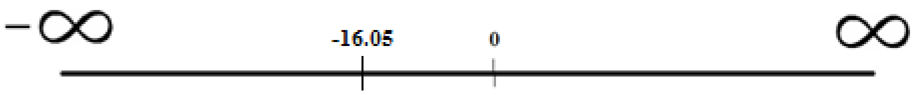




Encontramos otra solución, x=-16.05

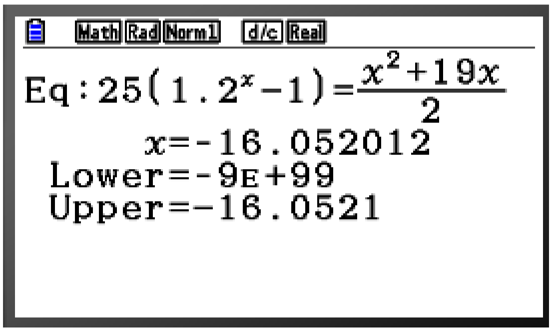
Ha evaluado los miembros de la ecuación de la derecha y de la izquierda para x=-16.05 y da como resultado en cada uno de los miembros de -23.66

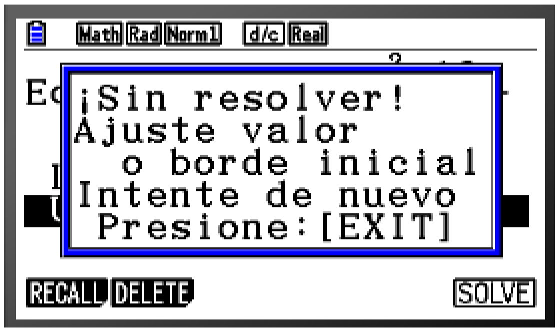
No hemos terminado, llevamos dos soluciones: x=0 y x=-16.05, la recta real queda dividida en tres intervalos:



Buscaremos ahora en el intervalo (-∞,-16.05):

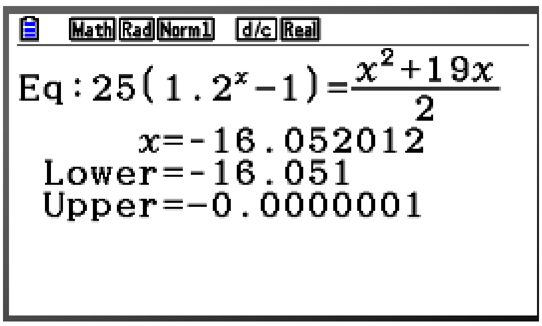
F1(REPEAT) y rellenamos el intervalo de búsqueda correspondiente, cursor sobre la x.
F6(SOLVE)

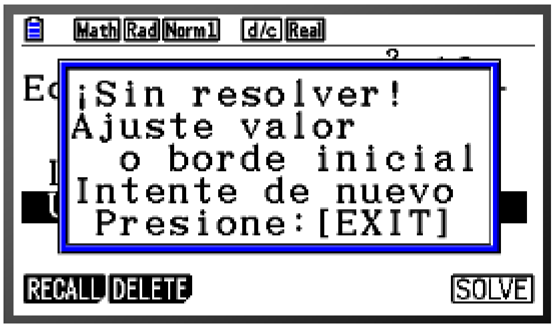




No puede resolverlo, porque en ese intervalo no queda ninguna solución. (precaución cuando estamos en el lado negativo de la recta real, -16.0521, está a efectivamente a la izquierda de -16.052012).

Debemos comprobar que no se ha saltado ninguna solución en el intervalo (-16.052012, 0):
F1(REPEAT) y rellenamos el intervalo de búsqueda correspondiente, cursor sobre la x.
F6(SOLVE

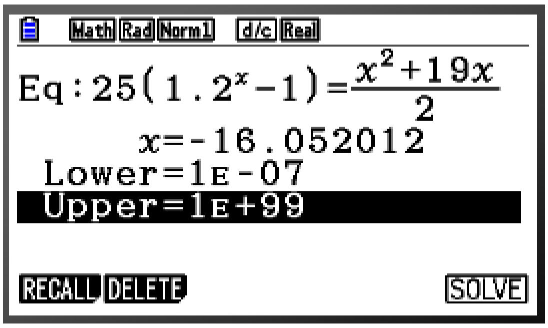


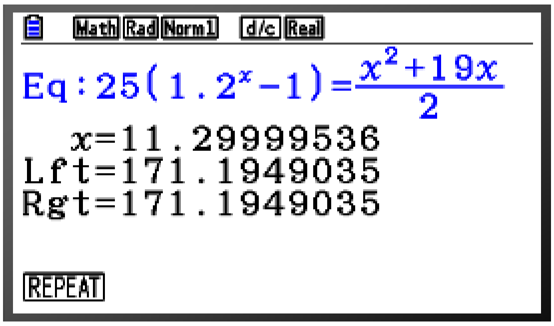


Tampoco quedan soluciones en el intervalo **(-16.052012, 0)**

Vamos a ver si quedan más soluciones en el intervalo (0,∞):

F1(REPEAT) y rellenamos el intervalo de búsqueda correspondiente.
F6(SOLVE)

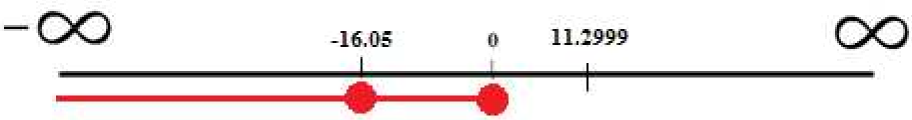




Hallamos otra solución x=11.29999536

Ha evaluado los miembros de la ecuación de la derecha y de la izquierda para x=11.29999536 y da como resultado en cada uno de los miembros de 171.1949035

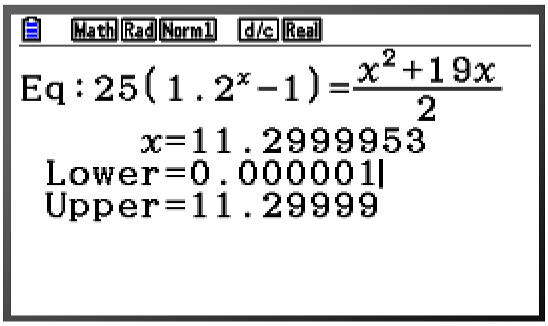
La recta real queda dividida en cuatro intervalos:

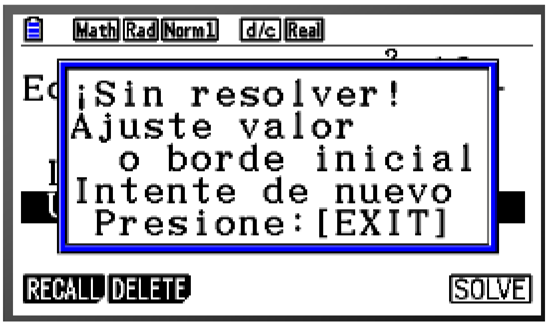


De -∞ a -16.05, ya hemos comprobado que no hay más soluciones

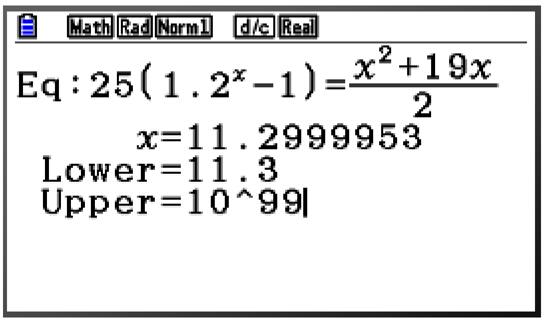
De -16.05 a 0, también hemos comprobado que no quedan,

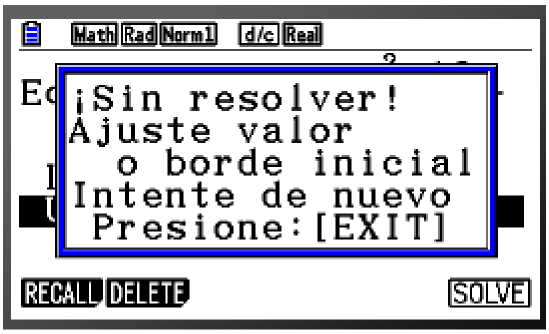
Falta por comprobar los otros dos intervalos, vamos a ello:





En el intervalo (0, 11.2999) no quedan.





En el intervalo (11.3, ∞) tampoco.

Luego hay tres soluciones:

X=-16.05

X=0

X=11.29999

Este método es muy rápido una vez que se coge práctica, y sirve para evaluar rápidamente las soluciones de ecuaciones muy complejas de resolver analíticamente. Practicad.

B) MÉTODO GRÁFICO (recomendado)
2 opciones:

Ejemplo

Mismo ejemplo para comparar con el método anterior

Resuelve la siguiente ecuación:

$$25(1.2^n - 1) = \frac{n^2 + 19n}{2}$$

OPCIÓN 1

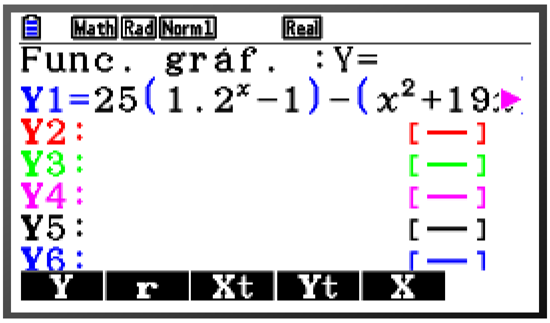
Vamos a hacer la gráfica de la función, para ello, pasamos todo a un miembro, y dejamos el otro a 0:

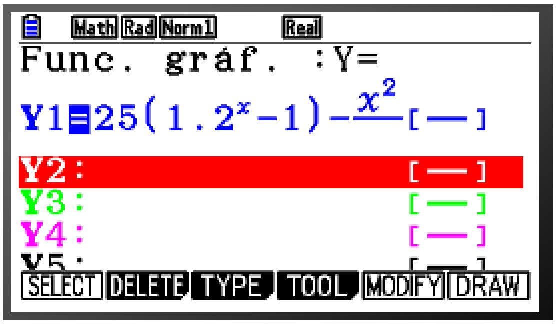
$$25(1.2^n - 1) - \frac{n^2 + 19n}{2} = 0$$

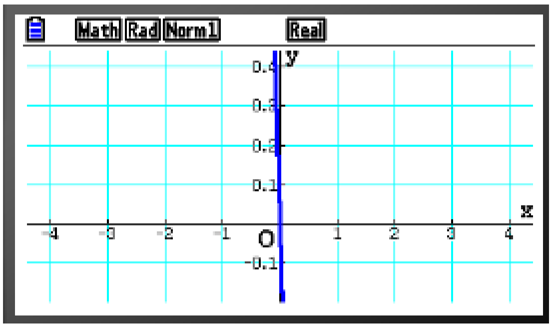
Las soluciones de esta ecuación, son las mismas que las de la ecuación inicial, pero las raíces de esta última puede dárnoslas la calculadora:

Menú ➔GRAPH (Tecleamos la ecuación. Si se necesitan paréntesis añadirlos)

EXE ➔F6(DRAW)

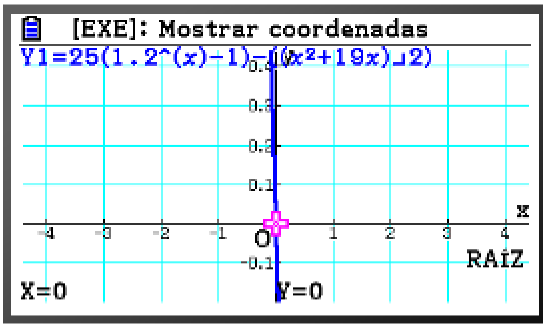






La escala por defecto de la calculadora es muy pequeña. Si analizamos ahora las RAICES, solamente encontraremos las que se nos presentan en pantalla y ninguna más deberíamos hacer un ZOOM antes. Pero para comprobar lo dicho, y analizando solamente lo que nos presenta la pantalla, procederíamos:

SHIFT➔F5(G-SOLVE)➔F1(ROOT)

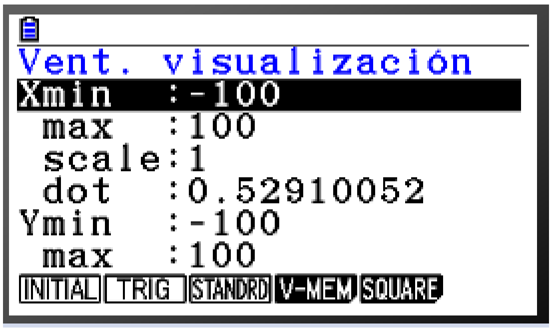


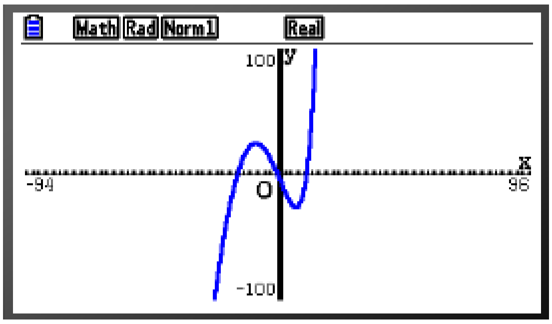
Solamente encuentra x=0, si desplazamos con el cursor a derecha e izquierda, no localiza ninguna más, porque solamente analiza lo que hay en pantalla.

Hacemos un ZOOM

SHIFT➔F3(V-WIN) y ponemos los límites de los ejes. Probamos con -100 a 100 tanto en x como en y:

EXIT➔DRAW

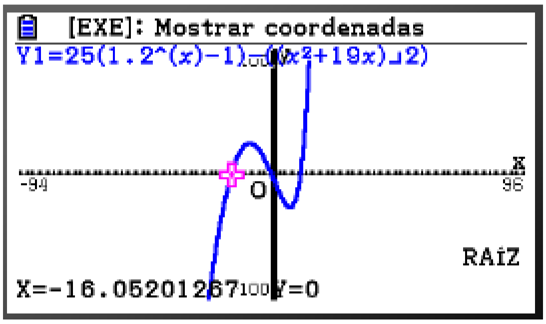




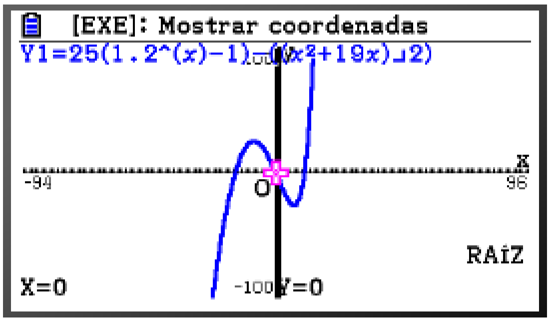
Como podemos comprobar la gráfica aparece ahora en su plenitud y podemos analizarla:

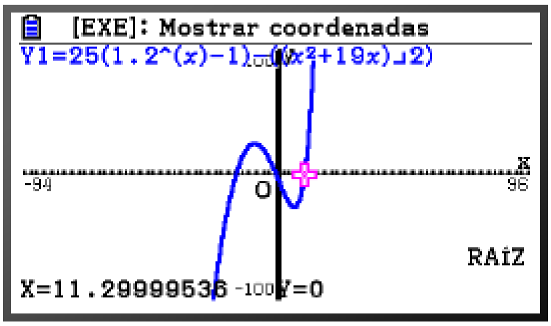
Vemos que va a tener tres raíces, las hallamos:

SHIFT➔F5(G-SOLVE)➔F1(ROOT)



X=-16.05, Con el cursor presionando hacia la derecha hallamos las otras dos consecutivamente:





Luego las tres soluciones coinciden con el método anterior:

X=-16.05

X=0

X=11.29999

Hay que tener cuidado con este método, que la gráfica esté completamente dibujada, al menos la posición de las raíces se presente en la pantalla y no conformarnos con el primer valor hallado, hacer ZOOM si es preciso para ver la gráfica con plenitud.

OPCIÓN 2

También vamos a hacer la gráfica de la función, pero, NO pasamos todo a un miembro, y dejamos el otro a 0, SINO QUE, consideraremos que cada lado de la ecuación es una ecuación distinta

$$25(1.2^n - 1) = \frac{n^2 + 19n}{2}$$

ASÍ,

Consideraremos como una ecuación a representar el lado de la izquierda: (EC. 1)

$$y = 25(1.2^n - 1)$$

Y consideraremos como otra ecuación el lado de la derecha: (EC. 2)

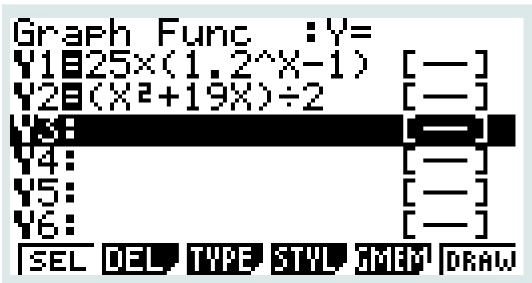
$$y = \frac{n^2 + 19n}{2}$$

Las representaremos conjuntamente, y los puntos de intersección de las dos gráficas, serán las soluciones de la ecuación inicial. Ya que en los puntos de corte, el valor de la función considerada es el mismo, tanto en el lado de la derecha como en el de la izquierda.

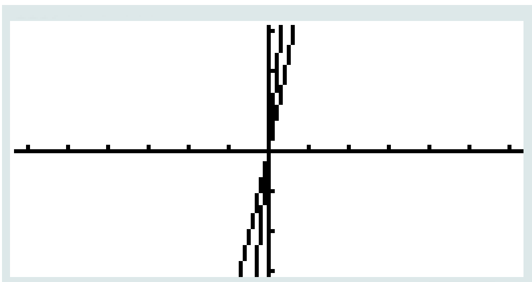
Menú ➔GRAPH (Tecleamos la ecuación. Si se necesitan paréntesis añadirlos)

Escribimos en Y1, la ecuación correspondiente al lado izquierdo

Y en Y2, la ecuación correspondiente al lado derecho:



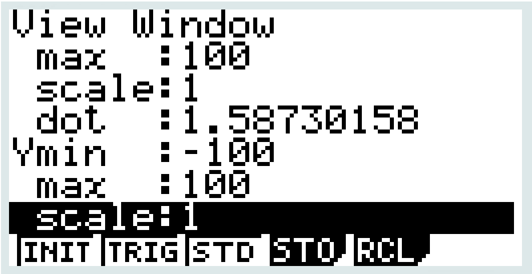
EXE ➔F6(DRAW)

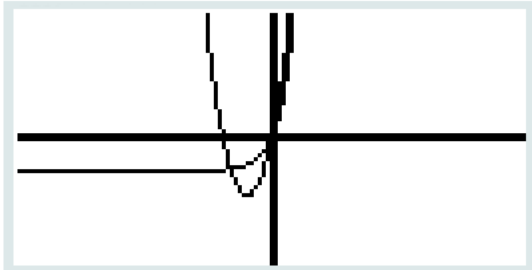


Hacemos un ZOOM

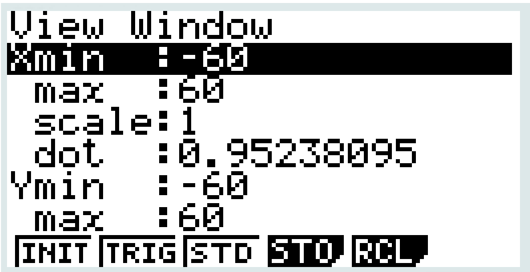
SHIFT➔F3(V-WIN) y ponemos los límites de los ejes. Probamos con -100 a 100 tanto en x como en y:

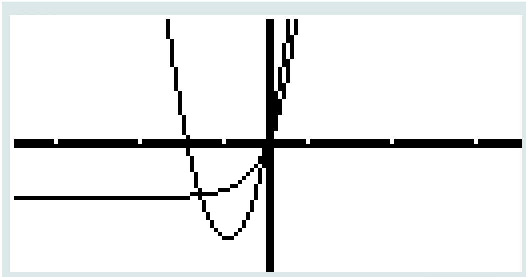
EXIT➔DRAW





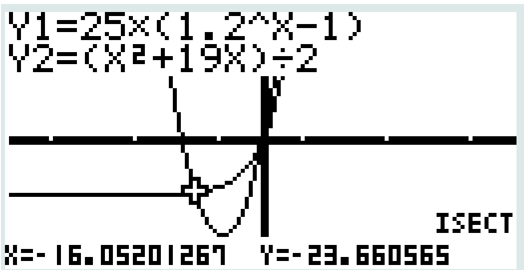
Observamos que se pueden ajustar más los límites del zoom, probaremos con:





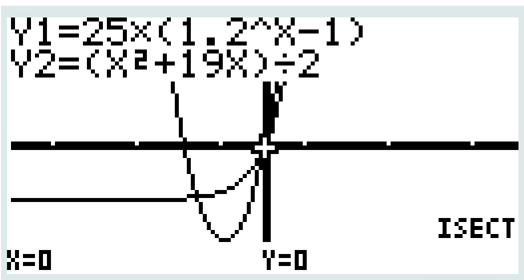
Las soluciones son los puntos de intersección de las dos gráficas. Se hallan:

SHIFT➔F5 (G-solv)➔F5(ISCT)

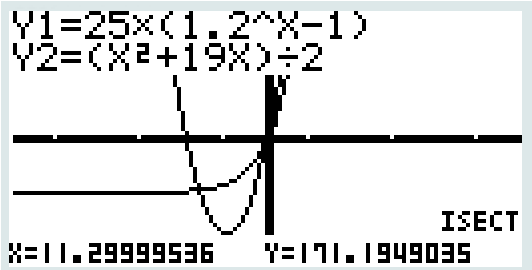


primer punto de intersección en x=16.0520

Con las teclas del cursor presionando hacia la derecha, va hallando sucedsivamente los distintos puntos de corte:



Otro punto en x=0, y



Otro punto y último en x=11,2999

Luego las tres soluciones coinciden con los métodos anteriores:

X=-16.05

X=0

X=11.29999

Otro ejemplo

Resuelve la siguiente ecuación :

Esta ecuación aparece en el problema de BI NM, muestra 14 P2#7 (a resolver en la serie de trigonometría propuesta)

$$\frac{1}{2}(\theta - sin\theta) = \frac{1}{8}\pi$$

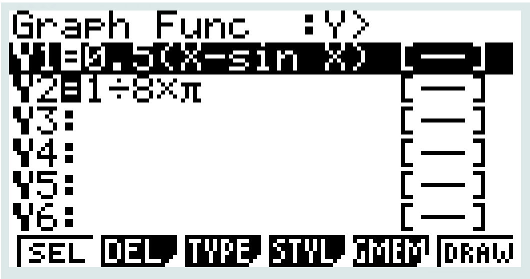
Utilizaremos el último método gráfico, representaremos el lado de la izquierda como una ecuación, y el lado de la derecha como otra. El punto, o los puntos de intersección de las dos gráficas, son los puntos que hacen el lado derecho e izquierdo ser iguales, y por tanto soluciones de la ecuación.

Nótese, que en la ecuación, están involucrados una razón trigonométrica y un ángulo y no podemos aplicar las ecuaciones trigonométricas estudiadas, pues solamente tratan con razones de ángulos, y no a la vez con ángulos sin razones.

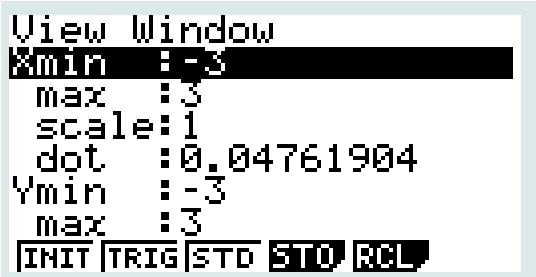
Menú ➔GRAPH (Tecleamos la ecuación. Si se necesitan paréntesis añadirlos)

Escribimos en Y1, la ecuación correspondiente al lado izquierdo

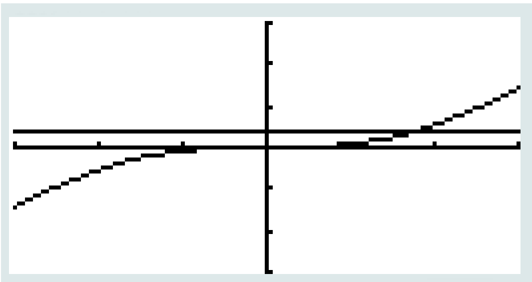
Y en Y2, la ecuación correspondiente al lado derecho:

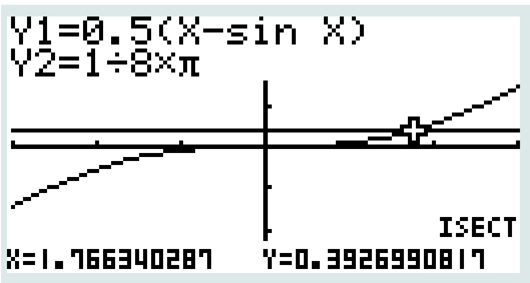


ajustamos la escala si es necesario, después de haberla representado. Después de representarla, la ajusté a lo siguiente:



Se dibuja definitivamente:


y por último se analiza el punto de corte:



x=1.7663, luego **Θ=1.7663 rad.**

Otro ejemplo

Resuelve la siguiente ecuación :

Esta ecuación aparece en el problema de BI NM, mayo 15 TZ2 P2#10 (a resolver en la serie de trigonometría propuesta)

$$2(1 - cos \propto) = \frac{1}{2} \propto$$

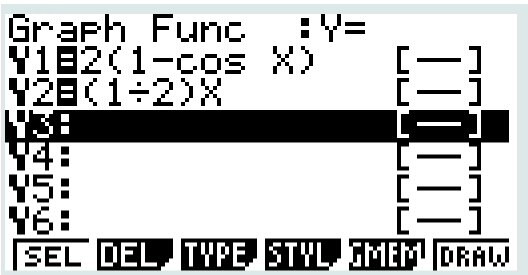
También aparecen un ángulo y una razón trigonométrica de ese mismo ángulo.

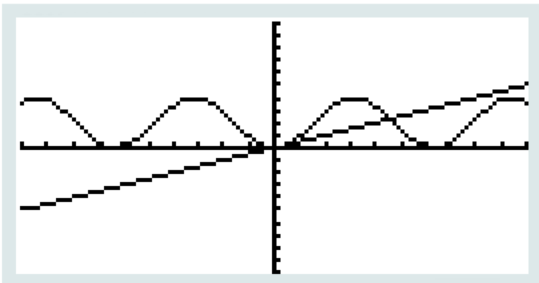
Gráficamente:

Menú ➔GRAPF (Tecleamos la ecuación. Si se necesitan paréntesis añadirlos)

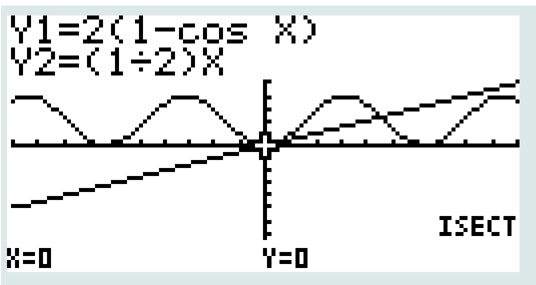
Escribimos en Y1, la ecuación correspondiente al lado izquierdo

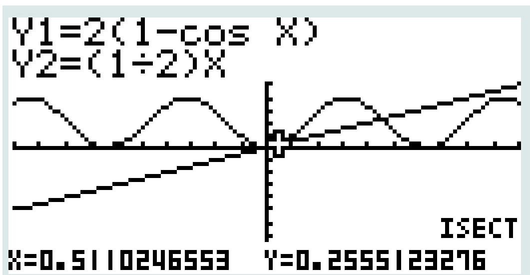
Y en Y2, la ecuación correspondiente al lado derecho:

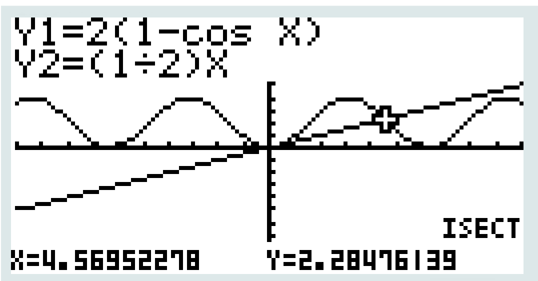




Sin ajustar la escala hallamos las intersecciones de las dos ecuaciones (soluciones):







Hay tres soluciones:

X= 0

X= 0.5110

X=4.5695

Pero por el contexto y/o enunciado del problema la única solución posible en ese caso es x=0.5110,

Luego la solución era: **α=0.5110 rad.**

Otro ejemplo (INECUACIÓN)

Resuelve la siguiente inecuación :

Esta inecuación aparece también en el problema BI NM, mayo 15 TZ2 P2#10 (a resolver en la serie de trigonometría propuesta)

$$2(1-cos\beta)-\left(\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}sin\beta\right)>\beta$$

También aparecen razones trigonométricas y ángulos mezclados. Además se trata de una inecuación. Las soluciones de las inecuaciones suelen ser intervalos.

Lo mejor es pasar todo a un miembro y dejar el otro miembro en 0:

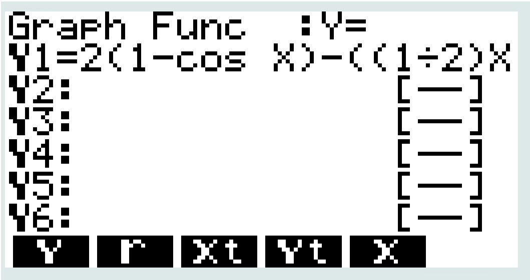
$$2(1-cos\beta)-\left(\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}sin\beta\right)-\beta>0$$

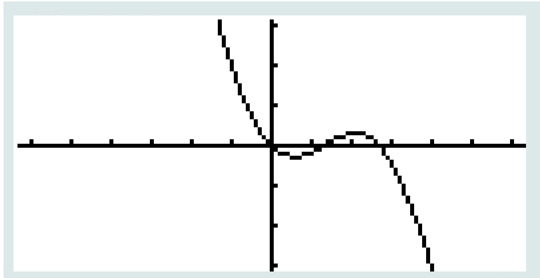
Debemos encontrar los valores de β que hacen a esa expresión ser mayor que 0 (positiva)

Entonces representaremos la curva:

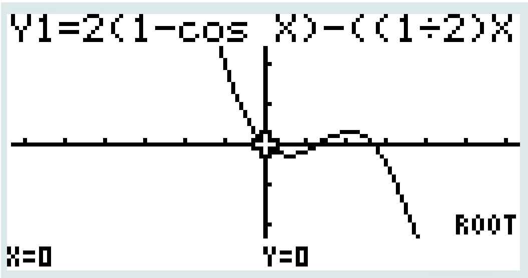
$$2(1-cos\beta)-\left(\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}sin\beta\right)-\beta=0$$

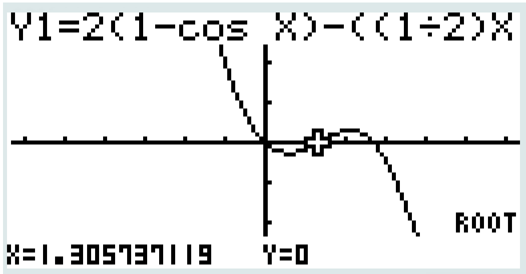
Menú ➔GRAPH (Tecleamos la ecuación. Si se necesitan paréntesis añadirlos)

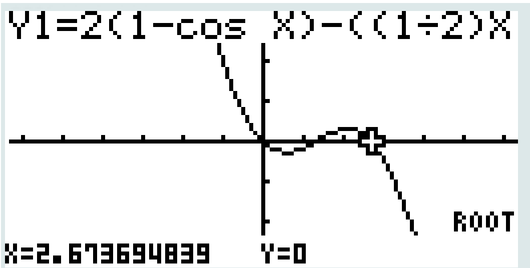




Hallamos las raíces, es decir los valores de x que hacen 0 la función, es decir (y=0)







Es decir hay 3 raices,

X=0

X=1.31

X= 2.67

Si nos fijamos, las raíces de la curva representan los valores de y=0. En el intervalo

(1.31, 2.67) la gráfica de la función está por encima del eje x, es decir es mayor que 0 (positiva), que es precisamente lo que andábamos buscando, luego el conjunto de soluciones es:

$1.31 < \beta < 2.67$ (radianes)

Nota: No consideramos los ángulos negativos, pues el problema de referencia era un problema geométrico con ángulos positivos.